Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Максимов Алексей Борисович
Должность: директор департамента по образовательной политике
Дата подписания: 27.09.2023 12:51:28
Уникальный программный ключ:
8db180d1a3f02ac9e60521a5672742735c18b1d6

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
**(МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХ)**

УТВЕРЖДАЮ
Декан ФЭУ
_____/А.В. Назаренко/
«16» февраля 2023 г.

# РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

# «Линейная алгебра»

Направление подготовки
**38.03.01 Экономика**

Профиль
**Экономика предприятий и организаций**

Квалификация
**бакалавр**

Формы обучения
**очная, очно-заочная**

Москва, 2023 г.

**Разработчик:**

Канд. физ.-мат. наук, доцент  /Е.А. Коган/

И.о. зав. кафедрой «Математика»,
канд. физ.-мат. наук  /Н.В. Васильева/

**Согласовано:**

Зав. кафедрой «Экономика и организация»,

канд. эконом. наук, доцент  /А.В. Тенищев/

## Содержание


1. Цели, задачи и планируемые результаты обучения по дисциплине……. 4
2. Место дисциплины в структуре образовательной программы…….. 4
3. Структура и содержание дисциплины…….. 5
   - 3.1. Виды учебной работы и трудоемкость…… 5
   - 3.2. Тематический план изучения дисциплины…… 6
   - 3.3. Содержание дисциплины……. 6
   - 3.4. Тематика семинарских/практических и лабораторных занятий…….. 7
4. Учебно-методическое и информационное обеспечение……. 9
   - 4.1. Нормативные документы и ГОСТы…….. 9
   - 4.2. Основная литература……..... 9
   - 4.3. Дополнительная литература…… 9
   - 4.4. Электронные образовательные ресурсы…… 9
   - 4.5. Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение…. 10
   - 4.6. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы…….. 10
5. Материально-техническое обеспечение…… 11
6. Методические рекомендации…… 11
   - 6.1. Методические рекомендации для преподавателя по организации обучения 11
   - 6.2. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины…… 12
7. Фонд оценочных средств…….. 14

Приложение 1. Тематический план содержания дисциплины……. 15
Приложение 2. Фонд оценочных средств…….. 23

1. Методы контроля и оценивания результатов обучения…….. 23
2. Шкала и критерии оценивания результатов обучения…… 23
3. Оценочные средства…… 24
   - 3.1. Текущий контроль…….. 25
   - 3.2. Промежуточная аттестация…… 31

## 1. Цели, задачи и планируемые результаты обучения по дисциплине

К основным *целям* освоения дисциплины «Линейная алгебра» следует отнести:

- воспитание у студентов общей математической культуры;
- приобретение студентами широкого круга математических знаний, умений и навыков;
- развитие способности студентов к индуктивному и дедуктивному мышлению наряду с развитием математической интуиции;
- умение студентами развивать навыки самостоятельного изучения учебной и научной литературы, содержащей математические сведения и результаты;
- подготовку студентов к деятельности в соответствии с квалификационной характеристикой бакалавра по направлению, в том числе формирование умений использовать освоенные математические методы в профессиональной деятельности.
- подготовку высококвалифицированных кадров, востребованных в условиях цифровой турбулентности и высоких технологических рисков современной цифровой экономики.

К основным *задачам* освоения дисциплины «Линейная алгебра» следует отнести:

- освоение студентами основных понятий, методов, формирующих общую математическую подготовку, необходимую для успешного решения прикладных задач;
- формирование у студента требуемого набора компетенций, соответствующих его направлению подготовки и обеспечивающих его конкурентоспособность на рынке труда.

Обучение по дисциплине «Линейная алгебра» направлено на формирование у обучающихся следующих компетенций в соответствии с ФГОС 38.03.01 (уровень бакалавриата) по направлению подготовки 38.03.01 Экономика, утверждённым приказом Минобрнауки России от 12.08.2020 № 954 (с изменениями и дополнениями от 26 ноября 2020 г):

| **Код и наименование компетенций** | **Индикаторы достижения компетенции** |
|---|---|
| УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач | ИУК-1.1. Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие<br>ИУК-1.2. Осуществляет поиск, критически оценивает, обобщает, систематизирует и ранжирует информацию, требуемую для решения поставленной задачи<br>ИУК-1.3. Рассматривает и предлагает рациональные варианты решения поставленной задачи, используя системный подход, критически оценивает их достоинства и недостатки |

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к обязательной части блока Б1: Модуль «Математические и естественно-научные дисциплины».

Её изучение обеспечивает изучение дисциплин

*В обязательной части*:

- математический анализ;

- эконометрика;
- экономическая статистика;
- оценка и анализ рисков.

*В части, формируемой участниками образовательных отношений:*

- финансовый анализ;
- бизнес-планирование.

## 3. Структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы -108 часов.

### 3.1. Виды учебной работы и трудоемкость

#### 3.1.1. Очная форма обучения

| п/п | Вид учебной работы | Количество часов | Семестр 1 |
|---|---|---|---|
| | **Аудиторные занятия** | 48 | 48 |
| | В том числе: | | |
| 1. | Лекции | 16 | 16 |
| 2. | Семинарские/практические занятия | 32 | 32 |
| 3. | Лабораторные занятия | - | - |
| | **Самостоятельная работа** | 60 | 60 |
| | **Промежуточная аттестация** | | |
| | экзамен | Э | Э |
| | **Итого** | 108 | 108 |

#### 3.1.2. Очно-заочная форма обучения

| п/п | Вид учебной работы | Количество часов | Семестр 1 |
|---|---|---|---|
| | **Аудиторные занятия** | 28 | 28 |
| | В том числе: | | |
| .1 | Лекции | 8 | 8 |
| .2 | Семинарские/практические занятия | 20 | 20 |
| | Лабораторные занятия | - | - |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **Самостоятельная работа** | 80 | 80 |
| | **Промежуточная аттестация** | | |
| | экзамен | Э | Э |
| | **Итого** | 108 | 108 |

### 3.2. Тематический план изучения дисциплины

Размещён в приложении 1 к рабочей программе.

### 3.3. Содержание разделов дисциплины

**Введение**

Предмет, задачи и содержание дисциплины. Основные этапы развития дисциплины. Структура курса, его место и роль в подготовке бакалавра, связь с другими дисциплинами.

**Раздел 1. Элементы линейной алгебры**

**Тема 1. Матрицы и определители.**

Понятие матрицы. Виды матриц. Действия над матрицами. Операции над матрицами и их свойства. Определители, их свойства и вычисления. Понятия минора и алгебраического дополнения. Разложение определителя по элементам строки или столбца. Вычисление определителей различного порядка.

Обратная матрица и алгоритм ее вычисления. Элементарные преобразования матриц. Приведение матрицы к диагональному или трапециевидному виду. Матричная форма записи системы линейных алгебраических уравнений. Ранг матрицы.

**Тема 2.Решение систем линейных алгебраических уравнений**.

Системы линейных алгебраических уравнений, основные понятия. Решение систем линейных уравнений методом Крамера, методом обратной матрицы, методом Гаусса. Теорема Кронекера – Капелли. Решение произвольных систем линейных уравнений методом Гаусса. Решение однородных систем линейных уравнений. Критерий существования нетривиальных решений.

**Раздел 2. Элементы векторной алгебры**

**Тема 1.** Линейные операции над векторами, их свойства. Линейные комбинации векторов. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис системы векторов. Единственность разложения вектора по базису. Ортонормированный базис.

**Тема 2.** Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, их свойства. Условия ортогональности, коллинеарности, компланарности векторов. Вычисление скалярного, векторного и смешанного произведений векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе.

**Тема 3.** Линейные пространства. Понятие базиса пространства геометрических векторов. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе от базиса к базису. Собственные значения и собственные векторы матрицы.

**Раздел 3.Комплексные числа и многочлены**

Понятие комплексного числа. Формы записи комплексных чисел. Действия над комплексными числами. Формула Муавра. Извлечение корня n-ой положительной степени из комплексного числа. Разложение многочлена на множители. Основная теорема алгебры.

**Раздел 4. Аналитическая геометрия**

Системы координат. Декартовы прямоугольные координаты на плоскости и в пространстве. Полярная система координат.

**Тема 1. Прямые и плоскости**

Различные типы уравнений плоскости и уравнений прямой (на плоскости и в пространстве).
Вычисление расстояний между двумя точками, точкой и прямой, точкой и плоскостью.
Вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми.
Вычисление углов между двумя прямыми, прямой и плоскостью, двумя плоскостями.

**Тема 2. Кривые и поверхности второго порядка**

Кривые второго порядка, их геометрические свойства и уравнения. Приведение кривой второго порядка к каноническому виду.
Уравнение поверхности второго порядка. Канонические уравнения сферы, эллипсоида, конуса, гиперболоида, параболоида.

## 3.4. Тематика практических занятий по дисциплине «Линейная алгебра»

### 3.4.1. Очная форма обучения

| № занятия | Тема занятия |
|---|---|
| 1 | **Раздел 1. Элементы линейной алгебры.** Матрицы, действия над матрицами. |
| 2 | Определители, их свойства и вычисление. Матричная запись системы линейных уравнений. |
| 3 | Обратная матрица и ее вычисление. |
| 4 | Системы линейных алгебраических уравнений, основные понятия и определения. Решение систем линейных уравнений методом Крамера, методом обратной матрицы |
| 5 | Решение систем линейных уравнений методом Гаусса. Ранг матрицы. Теорема Кронекера – Капелли. |
| 6 | Метод Гаусса в произвольных системах линейных уравнений. Однородные системы линейных уравнений. |
| 7 | **Раздел 2. Элементы векторной алгебры.**Векторы. Линейные операции над векторами, их свойства. Линейное пространство геометрических векторов. Понятие линейной комбинации векторов. Линейно независимые и линейно зависимые системы векторов. |
| 8 | Понятие базиса пространства геометрических векторов. Координаты вектора. Ортонормированный базис. Коллинеарность, ортогональность и компланарность векторов. |
| 9 | Скалярное произведение векторов и его свойства. Условие ортогональности векторов. Векторное произведение двух векторов, его свойства. Условие коллинеарности векторов |

| | |
|---|---|
| 10 | Смешанное произведение трех векторов и его свойства. Вычисление объема параллелепипеда и пирамиды. Условие компланарности векторов. Вычисление скалярного, векторного и смешанного произведений векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе. |
| 11 | Линейные пространства. Размерность и базис линейного пространства.<br>Матрица перехода от базиса к базису. Преобразование координат вектора при изменении базиса. Линейные операторы, действия с линейными операторами. Собственные векторы и собственные значения матрицы |
| 12 | **Раздел 3.Комплексные числа и многочлены** Множество комплексных чисел. Формы записи комплексных чисел. Действия над комплексными числами. Разложение многочлена на множители, основная теорема алгебры |
| 13 | **Раздел 4. Аналитическая геометрия**<br>Системы координат. Различные типы уравнений плоскости |
| 14 | Различные типы уравнений прямой на плоскости и в пространстве |
| 15 | Взаимное расположение прямых на плоскости и в пространстве. Вычисление расстояний между двумя точками, точкой и прямой. Вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми. Взаимное расположение плоскостей. Вычисление расстояний между точкой и плоскостью |
| 16 | Кривые второго порядка их геометрические свойства. Уравнения эллипса, гиперболы, параболы Общее уравнение кривой второго порядка. Приведение кривой второго порядка к каноническому виду. Поверхности второго порядка |

### 3.4.2. Очно-заочная форма обучения

| № занятия | Тема занятия |
|---|---|
| 1 | **Раздел 1. Элементы линейной алгебры.** Матрицы, действия над матрицами. Определители, их свойства и вычисление. |
| 2 | Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера, методом обратной матрицы, методом Гаусса. |
| 3 | **Раздел 2. Элементы векторной алгебры.** Линейные операции над векторами, их свойства. Вычисление скалярного, векторного и смешанного произведений векторов. . Собственные векторы и собственные значения матрицы |
| 4 | **Раздел 3. Комплексные числа и многочлены.** Действия над комплексными числами. Разложение многочлена на множители |
| 5 | **Раздел 4. Аналитическая геометрия** Различные типы уравнений плоскости и прямой на плоскости и в пространстве. Простейшие задачи аналитической геометрии (вычисление расстояний и углов) |

## 4. Учебно-методическое и информационное обеспечение

### 4.1. Нормативные документы и ГОСТы

1. ФГОС 38.03.01. 38.03.01 Экономика. Утверждён приказом Минобрнауки России от 12.08.2020 № 954.
2. Академический учебный план по направлению подготовки: 38.03.01 Экономика Профиль: Экономика организаций и предприятий. Форма обучения – очная. 2023.
3. Академический учебный план по направлению подготовки: 38.03.01 Экономика Профиль: Экономика организаций и предприятий. Форма обучения – очно-заочная. 2023.
4. Указ Президента Российской Федерации от 01.12.2016 № 642 «Стратегии научно-технологического развития Российской Федерации».
5. Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 23.08.2017 № 816 «Об утверждении Порядка применения организациями, осуществляющими образовательную деятельность, электронного обучения, дистанционных образовательных технологий при реализации образовательных программ».

### 4.2. Основная литература


1. Заболотский В.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия (учебный комплекс): учебное пособие, 2-е изд. Стер. М.: Изд-во ИНФРА-М, 2022. 309 с. (Высшее образование: бакалавриат).
2. Сиротина И.К. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: интерактивный курс: учебное пособие для вузов. СПб, Изд-во Лань, 2022. 180 с.
3. Курс лекций по линейной алгебре и аналитической геометрии: учебное пособие. // Кудрявцев Б.Ю., Матяш В.И., Показеев В.В., Черкесова Г.В.. М.: МГТУ «МАМИ», 2009. – 362с. [http://lib.mami.ru/lib/content/elektronnyy-katalog. Электронный ресурс.]


### 4.3. Дополнительная литература


1. Краткий курс высшей математики [Электронный ресурс]: учеб. - Электрон. дан. - Москва: Дашков и К, 2017. - 510 с. [Режим доступа: URL: https://e.lanbook.com/book/93522. - Загл. с экрана.] .
2. Зубков В.Г., Ляховский В.А., Мартыненко А.И., Миносцев В.Б., Пушкарь Е.А. Курс математики для технических высших учебных заведений. Части 1-4. М.: МГИУ, 2012. 400 экз.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М.: Наука. Глав.ред-ия физико-матем.лит-ры, 1988. 224 с.
4. Беклемишев, Д.В. Решение задач из курса аналитической геометрии и линейной алгебры [Электронный ресурс]: учеб. пособие - Электрон. дан. - Москва: Физматлит, 2014. - 192 с. [Режим доступа: URL: https://e.lanbook.com/book/59632. - Загл. с экрана.]


### 4.4. Электронные образовательные ресурсы

Проведение занятий и аттестаций возможно в дистанционном формате с применением системы дистанционного обучения университета (СДО-LMS) на основе разработанных кафедрой «Математика» электронных образовательных ресурсов (ЭОР) по всем разделам программы:.

| Название ЭОР | |
|---|---|
| Линейная и векторная алгебра | https://online.mospolytech.ru/course/view.php?id=3368 |

| | |
|---|---|
| Аналитическая геометрия | https://online.mospolytech.ru/local/crw/course.php?id=2843 |
| Линейная алгебра и аналитическая геометрия | https://online.mospolytech.ru/course/view.php?id=462 |

Разработанные ЭОР включают тренировочные и итоговые тесты.
Порядок проведения работ в дистанционном формате устанавливается отдельными распоряжениями проректора по учебной работе и/или центром учебно-методической работы.

Каждый студент обеспечен индивидуальным неограниченным доступом к электронной библиотеке московского политеха
https://online.mospolytech.ru/course/view.php?id=7621&section=1.
Интернет-ресурсы включают учебно-методические материалы в электронном виде, представленные на сайте mospolytech.ru в разделе: «Центр математического образования» (http://mospolytech.ru/index.php?id=4486,
http://mospolytech.ru/index.php?id=5822).
Полезные учебно-методические и информационные материалы представлены на сайтах:
*http://exponenta.ru*, *http://eqworld.ipmnet.ru/ru/info/mathwebs.htm*.
Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» для освоения дисциплины: www.matematikalegko.ru>studentu, www.i-exam.ru.

### 4.5. Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение

| № | Наименование | Разработчик ПО (правообладатель) | Доступность (лицензионное, свободно распространяемое) | Ссылка на Единый реестр российских программ для ЭВМ и БД (при наличии) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | AstraLinuxCommonEdition | ООО "РУСБИТЕХ-АСТРА" | Лицензионное | https://reestr.digital.gov.ru/reestr/305783/?sphrase_id=954036 |
| 2 | МойОфис | ООО "НОВЫЕ ОБЛАЧНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ" | Лицензионное | https://reestr.digital.gov.ru/reestr/301558/?sphrase_id=943375 |

### 4.6. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

**Перечень ресурсов сети Интернет, доступных для освоения дисциплины:**

| | Наименование | Ссылка на ресурс | Доступность |
|---|---|---|---|
| **Информационно-справочные системы** | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | StackOverflow | https://stackoverflow.com/ | Доступна в сети Интернет без ограничений |
| | Информационные ресурсы Сети КонсультантПлюс | http:// www.consultant.ru | Доступно |
| | Портал Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования | http://www.fgosvo.ru. | Доступно |
| **Электронно-библиотечные системы** | | | |
| | Лань | https://e.lanbook.com/ | Доступна в сети Интернет без ограничений |
| | IPR Books | https://www.iprbookshop.ru/ | Доступна в сети Интернет без ограничений |
| **Профессиональные базы данных** | | | |
| | База данных научной электронной библиотеки (eLIBRARY.RU) | http://www.elibrary.ru | Доступно |
| | WebofScienceCoreCollection – политематическая реферативно-библиографическая и наукометрическая (библиометрическая) база данных | http://webofscience.com | Доступно |

## 5. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Материально – техническая база университета обеспечивает проведение всех видов занятий, предусмотренных учебным планом, и соответствует действующим санитарным и противопожарным правилам и нормам.

Кафедра «Математика» не располагает собственным аудиторным фондом и использует учебные аудитории из общего фонда университета.

При необходимости для проведения интерактивных практических занятий используются компьютерные классы университета.

## 6. Методические рекомендации

### 6.1. Методические рекомендации для преподавателя по организации обучения

Прежде всего, следует обратить внимание студентов на то, что практически весь изучаемый ими материал не требует какой-либо специальной (дополнительной) подготовки и

вполне может быть успешно изучен, если студенты будут посещать занятия, своевременно выполнять домашние задания и пользоваться (при необходимости) системой плановых консультаций в течение каждого семестра. Вошедшие в курс математики разделы являются классическими, в то же время они практически ориентированы, так как имеют широкое распространение для решения разного рода задач внутри самой математики и прикладных задач. Их освоение поможет студентам логически верно, аргументировано и ясно строить устную и письменную речь, успешно применять накопленные знания в профессиональной деятельности.

Необходимо с самого начала занятий рекомендовать студентам основную и дополнительную литературу, а в конце семестра дать список вопросов для подготовки к экзамену.

На первом занятии по дисциплине следует обязательно проинформировать студентов о виде и форме промежуточной аттестации по дисциплине, сроках ее проведения, условиях допуска к промежуточной аттестации, применяемых видах промежуточного контроля.

Изложение теоретического материала должно сопровождаться иллюстративными примерами, тщательно отобранными преподавателем так, чтобы технические трудности и выкладки при решении задачи не отвлекали от главного: осмысления идеи и сути применяемых методов. Следует всегда указывать примеры практического применения рассмотренных на занятиях уравнений и формул.

Практические занятия должны быть организованы преподавателем таким образом, чтобы оставалось время на периодическое выполнение студентами небольшой самостоятельной работы в аудитории для проверки усвоения изложенного материала.

Преподаватель, ведущий практические занятия, должен согласовывать учебно-тематический план занятий с лектором, использовать единую систему обозначений.

Преподавателю следует добиваться систематической непрерывной работы студентов в течение семестра, необходимо выявлять сильных студентов и привлекать их к научной работе, к участию в разного рода олимпиадах и конкурсах.

Студент должен ощущать заинтересованность преподавателя в достижении конечного результата: в приобретении обучающимися прочных знаний, умений и владения накопленной информацией для решения задач в профессиональной деятельности.

### 6.1.1. Образовательные технологии

Возможно проведение занятий и аттестаций в дистанционном формате с применением системы дистанционного обучения университета (СДО-LMS) на основе разработанных кафедрой «Математика» электронных образовательных ресурсов (ЭОР) (см. п.4.4).
Порядок проведения работ в дистанционном формате устанавливается отдельными распоряжениями проректора по учебной работе и/или центром учебно-методической работы.

## 6.2. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

**Раздел: элементы линейной алгебры**

**Матрицы и определители.** Прежде всего, студент должен понять, что матрица – это таблица чисел (причем эта таблица может иметь одинаковое число строк и столбцов, а может быть и прямоугольной), а определитель- это число, записываемое в виде квадратной таблицы, то есть определители существуют только у квадратных матриц.

Следует обратить особое внимание на операцию умножения прямоугольных матриц и понять, каким получается порядок матрицы – произведения. Особенность матриц также состоит в том, что произведение матриц не перестановочно, то есть $AB \neq BA$.Следует обязательно убедиться в этом, решив соответствующие задачи.

Важным является понятие обратной матрицы. Надо знать условие существования обратной матрицы и алгоритм ее построения. После ее вычисления целесообразно делать проверку правильности решения, выполнив операцию умножения $A^{-1}A = E$ (должна получиться единичная матрица)

При изучении определителей надо четко усвоить понятия минора, алгебраического дополнения, знать многочисленные свойства определителя. Для освоения техники вычисления определителей целесообразно, выбрав произвольный определитель выше третьего порядка, раскрыть его различными способами, применяя разложение и по строкам и по столбцам. Обратите внимание, какие строки (столбцы) предпочтительнее выбирать для раскрытия определителя, чтобы упростить его вычисление. Особенно эффективно вычисление определителя с помощью элементарных преобразований, приводящих его к треугольному виду.

При изучении решений систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) обратите внимание, прежде всего, на понятие решения системы и условия существования решений в зависимости от соотношения между рангом матрицы, рангом расширенной матрицы системы и числом неизвестных и уравнений. Обратите внимание на условия применения формул Крамера и метода обратной матрицы. Внимательно разберите примеры решения произвольных систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса (введение базисных и свободных переменных).

**Раздел: Элементы векторной алгебры**

При изучении данной темы обратите внимание на линейные операции над векторами, на понятия линейной независимости и линейной зависимости векторов, на фундаментальное понятие базиса векторного пространства (и ортонормированного базиса), на разложение вектора по базису.

Знать определение, геометрические свойства скалярного, векторного и смешанного произведения векторов, формулы для их вычисления в векторной и в координатной форме. Обязательно знать и уметь проверять условия ортогональности, коллинеарности и компланарности векторов.

**Раздел: комплексные числа и многочлены**

В этом разделе, прежде всего, надо понять, что комплексное число явилось расширением понятия действительных чисел, знать определение и три формы записи комплексного числа (алгебраическую, тригонометрическую и показательную), геометрическую интерпретацию комплексного числа и взаимно-однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и множеством точек комплексной плоскости. Знать формулу Эйлера. Комплексные числа можно изображать с помощью векторов на комплексной плоскости. Поэтому операции сложения и вычитания комплексных чисел могут быть сведены к операциям сложения и вычитания соответствующих векторов.

Надо знать и уметь выполнять операции умножения, деления, возведения в положительную степень комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, извлечения корня n-ой степени из комплексного числа.

Следует обратить внимание на то, что множество комплексных чисел является замкнутым, то есть любая алгебраическая операция над комплексными числами не выводит за пределы области комплексных чисел.

Надо знать различные виды разложения многочлена на множители для случаев, когда среди корней многочлена могут быть кратные, комплексные корни. Эти сведения будут использоваться, например, в интегральном исчислении при вычислении интегралов от дробно-рациональных функций, при решении линейных однородных дифференциальных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами.

**Раздел: Аналитическая геометрия**

При изучении аналитической геометрии следует, прежде всего, понять, что ее задачей является изучение геометрических объектов при помощи аналитических методов алгебры и

математического анализа. В основе такого подхода лежит метод координат, впервые систематически примененный Р. Декартом. Основные понятия геометрии (точка, прямая, плоскость) являются неопределяемыми, и для их описания применяется аксиоматический метод, позволяющий установить взаимно однозначное соответствие между множеством точек прямой и множеством действительных чисел и, таким образом, ввести систему координат. Надо четко усвоить различные формы уравнений прямой и плоскости уметь переходить от одной формы к другой. Следует осмыслить и успешно применять решения классических задач аналитической геометрии о взаимном расположении прямых и плоскостей, уметь определять углы и расстояния между различными геометрическими объектами.

Отметим в заключение, что успешное изучение дисциплины « Линейная алгебра», приобретение необходимых компетенций, умений и навыков владения математическим аппаратом требует от студентов большой самостоятельной работы. Обратите внимание, что количество часов, отводимых на самостоятельную работу в соответствии с учебным планом, больше числа часов, отводимых на все виды аудиторных занятий.

## 7. Фонд оценочных средств

Фонд оценочных средств представлен в Приложении 2 к рабочей программе и включает разделы:

1. Методы контроля и оценивания результатов обучения
2 Шкала и критерии оценивания результатов обучения
3. Оценочные средства
3.1. Текущий контроль
3.2. Промежуточная аттестация

*Приложение 1*

**1. Тематический план содержания дисциплины «Линейная алгебра» по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика»**
**Профиль:**
**Экономика предприятий и организаций**
**(бакалавр)**
**Форма обучения – очная**
**Год набора 2023/2024**

| n/n | Раздел | Семестр | Неделя | Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов, и трудоемкость в часах | | | | | Виды самостоятельной работы студентов | | | | | Формы аттестации | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Л | П/С | Лаб | СРС | КСР | К.Р. | К.П. | РГР | Реферат | К/р | Э | З |
| **Первый семестр** | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1.1 | **Раздел 1. Элементы линейной алгебры** Матрицы, действия над матрицами. | 1 | 3 | 2 | 2 | | 3 | | | | | | | | |
| 1.2 | Определители, их свойства и вычисление. Матричная запись системы линейных уравнений. **Выдача заданий РГР № 1 по линейной алгебре.** | 1 | 4 | | 2 | | 3 | | | | + | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.3 | Обратная матрица и ее вычисление. Матричная запись системы линейных уравнений. | 1 | 5 | 2 | 2 | | 3 | | | | | | | | |
| 1.4 | Системы линейных алгебраических уравнений, основные понятия и определения. Решение систем линейных уравнений методом Крамера, методом обратной матрицы | 1 | 6 | | 2 | | 3 | | | | | | | | |
| 1.5 | Решение систем линейных уравнений методом Гаусса. Ранг матрицы. Теорема Кронекера – Капелли. | 1 | 7 | 2 | 2 | | 4 | | | | | | | | |
| 1.6 | Метод Гаусса в произвольных системах линейных уравнений. Однородные системы линейных уравнений. **Самостоятельная работа №1 по линейной алгебре в аудитории** | 1 | 8 | | 2 | | 4 | | | | | | + | | |
| 1.7 | **Раздел 2**. Векторы. Линейные операции над векторами, их свойства. Линейные комбинации векторов. Линейно независимые и линейно зависимые системы векторов. **Выдача заданий РГР №2 по векторной алгебре.** | 1 | 9 | 2 | 2 | | 4 | | | | + | | | | |
| 1.8 | Понятие базиса. Координаты вектора. Коллинеарность, ортогональность и компланарность векторов. | 1 | 10 | | 2 | | 4 | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.9 | Скалярное произведение векторов и его свойства. Векторное произведение двух векторов, его свойства. | 1 | 11 | 2 | 2 | | 4 | | | | | | | | |
| 1.10 | Смешанное произведение трех векторов и его свойства. Вычисление объема параллелепипеда. Условие коллинеарности, ортогональности и компланарности векторов. Ортонормированный базис. Вычисление скалярного, векторного и смешанного произведений векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе. **Самостоятельная работа № 2 по векторной алгебре в аудитории** | 1 | 12 | | 2 | | 4 | | | | | | + | | |
| 1.11 | Линейные пространства. Размерность и базис линейного пространства. Матрица перехода от базиса к базису преобразование координат вектора при изменении базиса. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. | 1 | 13 | 2 | 2 | | 4 | | | | | | | | |
| 1.12 | **Раздел 3.Комплексные числа и многочлены** Множество комплексных чисел. Формы записи комплексных чисел. Операции над комплексными числами. Разложение многочлена на множители основная теорема алгебры | 1 | 14 | | 2 | | 4 | | | | | | | | |
| 1.13 | **Раздел 4. Аналитическая геометрия** Системы координат. Различные типы уравнений плоскости | 1 | 15 | 2 | 2 | | 4 | | | | + | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Выдача заданий РГР №3 по аналитической геометрии** | | | | | | | | | | | | | | |
| 1.14 | Различные типы уравнений прямой на плоскости и в пространстве | 1 | 16 | | 2 | | 4 | | | | | | | | |
| 1.15 | Взаимное расположение прямых на плоскости и в пространстве. Вычисление расстояний между двумя точками, точкой и прямой.. Взаимное расположение плоскостей. Вычисление расстояний между точкой и плоскостью<br>**Самостоятельная работа № 3 по аналитической геометрии в аудитории** | 1 | 17 | 2 | 2 | | 4 | | | | | | + | | |
| 1.16 | Кривые второго порядка их геометрические свойства. Уравнения эллипса, гиперболы, параболы Общее уравнение кривой второго порядка. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду. Поверхности второго порядка | 1 | 18 | | 2 | | 4 | | | | | | | | |
| | **Форма аттестации** | | **19-21** | | | | | | | | | | | **Э** | |
| | **Всего часов по дисциплине** | | | **16** | **32** | | **60** | | | | **3 РГР** | | **3 сам раб.** | | |

**2. Тематический план содержания дисциплины «Линейная алгебра» по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика»**
**Профиль:**
**Экономика предприятий и организаций**
**(бакалавр)**
**Форма обучения – очно-заочная**
**Год приема 2023/2024**

| n/n | Раздел | Семестр | Неделя Семестра | Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов, и трудоемкость в часах | | | | | Виды самостоятельной работы Студентов | | | | | Формы аттестации | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Л | П/С | Лаб | СРС | КСР | К.Р. | К.П. | РГР | Реферат | К/р | Э | З |
| **Первый семестр** | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | **Раздел 1. Элементы линейной алгебры** Понятие матрицы. Виды матриц. Операции над матрицами и их свойства. Определители, их свойства и вычисления. Вычисление определителей различного порядка | 1 | 1 | 2 | | | 5 | | | | | | | | |
| 2 | Определители, их свойства и вычисления. Вычисление определителей различного порядка. **Выдача заданий РГР № 1 по линейной алгебре** | 1 | 2 | | 2 | | 5 | | | | + | | | | |
| 3 | Обратная матрица и алгоритм ее вычисления. Элементарные преобразования | 1 | 3 | | 2 | | 5 | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | матриц. Матричная форма записи системы линейных алгебраических уравнений. Ранг матрицы | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | СЛАУ, основные понятия решения, совместности и несовместности системы. Решение систем линейных уравнений методом Крамера, методом обратной матрицы, методом Гаусса. Теорема Кронекера – Капелли. | 1 | 4 | | 2 | | 5 | | | | | | | | |
| 5 | **Раздел 2. Элементы векторной алгебры**<br>Линейные операции над векторами, их свойства. Линейная зависимость и независимость векторов. Понятие базиса. Координаты вектора. | 1 | 5 | 2 | | | 6 | | | | | | | | |
| 6 | Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, их свойства.<br>**Выдача заданий РГР №2 по векторной алгебре** | 1 | 6 | | 2 | | 6 | | | | + | | | | |
| 7 | Разложение вектора по базису. Ортонормированный базис. Вычисление скалярного, векторного и смешанного произведений векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе. Условия ортогональности, коллинеарности, компланарности векторов | 1 | 7 | | 2 | | 6 | | | | | | | | |
| 8 | Линейные пространства. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе от базиса к базису. Собственные значения и собственные векторы матрицы | 1 | 8 | | 2 | | 6 | | | | | | | | |
| 9 | **Раздел 3. Комплексные числа и многочлены** | 1 | 9 | 2 | | | 6 | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Формы записи, операции над комплексными числами. Формула Муавра. Извлечение корня из комплексного числа | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | Разложение многочлена на множители. Основная теорема алгебры<br>**Контрольный тест по алгебре** | 1 | 10 | | 2 | | 6 | | | | | | + | | |
| 11 | **Раздел 4. Аналитическая геометрия**<br>Системы координат. Различные типы уравнений плоскости. | 1 | 11 | 2 | | | 6 | | | | | | | | |
| 12 | Различные типы уравнений прямой на плоскости и в пространстве<br>**Выдача заданий РГР №3 по аналитической геометрии** | 1 | 12 | | 2 | | 6 | | | | + | | | | |
| 13 | Взаимное расположение прямых на плоскости и в пространстве. Вычисление расстояний между двумя точками, точкой и прямой.. Взаимное расположение плоскостей. Вычисление расстояний между точкой и плоскостью | 1 | 13 | | 2 | | 6 | | | | | | | | |
| 14 | Кривые второго порядка их геометрические свойства. Уравнения эллипса, гиперболы, параболы Общее уравнение кривой второго порядка. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду. Поверхности второго порядка.<br>**Контрольный тест по аналитической геометрии** | 1 | 14 | | 2 | | 6 | | | | | | + | | |
| | **Форма аттестации** | | **15-18** | | | | | | | | | | | **Э** | |

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Всего часов по дисциплине** | | | **8** | **20** | | **80** | | | | **3 РГР** | | **2 те-ста** | | |

*Приложение 2*

# ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
## ПО ДИСЦИПЛИНЕ
# «Линейная алгебра»

Направление подготовки: 38.03.01 «Экономика».
Профиль: «Экономика предприятий и организаций
Формы обучения: очная, очно-заочная.

Кафедра: «Математика».

## 1.Методы контроля и оценивания результатов обучения

Для контроля успеваемости и качества освоения дисциплины настоящей программой предусмотрены следующие виды контроля:
- контроль текущей успеваемости (текущий контроль);
- промежуточная аттестация (экзамен).

## 2. Шкала и критерии оценивания результатов обучения

**Форма промежуточной аттестации: экзамен**

Промежуточная аттестация обучающихся в форме экзамена проводится по результатам выполнения всех видов учебной работы, предусмотренных учебным планом по данной дисциплине, при этом учитываются результаты текущего контроля успеваемости в течение семестра. Оценка степени достижения обучающимися планируемых результатов обучения по дисциплине проводится преподавателем, ведущим занятия по дисциплине методом экспертной оценки. По итогам промежуточной аттестации по дисциплине выставляется оценка «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно».

| Шкала оценивания | Описание |
|---|---|
| Отлично | Выполнены все **обязательные условия подготовки студента к промежуточной аттестации**, предусмотренные программой дисциплины. Студент демонстрирует соответствие знаний, умений, навыков показателям, приведенным в таблицах, оперирует приобретенными знаниями, умениями, навыками, применяет их в ситуациях повышенной сложности. При этом могут быть допущены незначительные ошибки, неточности, затруднения при переносе знаний и умений на новые, нестандартные задачи. |
| Хорошо | Выполнены все **обязательные условия подготовки студента к промежуточной аттестации**, предусмотренные программой дисциплины. Студент демонстрирует соответствие знаний, умений, навыков показателям, приведенным в |

| | |
|---|---|
| | таблицах, оперирует приобретенными знаниями, умениями, навыками. В то же время при ответе допускает несущественные погрешности, задачи решает с недочетами, не влияющими на общий ход решения. |
| Удовлетворительно | Выполнены все **обязательные условия подготовки студента к промежуточной аттестации**,предусмотренные программой дисциплины. Студент демонстрирует соответствие знаний, умений, навыков показателям, приведенным в таблицах, оперирует приобретенными знаниями, умениями, навыками. Но показывает неглубокие знания, при ответе не допускает грубых ошибок или противоречий, однако в формулировании ответа отсутствует должная связь между анализом, аргументацией и выводами, в решении задач могут содержаться грубые ошибки. Для получения правильного ответа требуются уточняющие вопросы. |
| Неудовлетворительно | Не выполнены **обязательные условия подготовки студента к промежуточной аттестации**, предусмотренные программой дисциплины, ИЛИ студент демонстрирует неполное соответствие знаний, умений, навыков приведенным в таблицах, допускаются значительные ошибки, проявляется отсутствие знаний, умений, навыков по ряду показателей, студент испытывает значительные затруднения при оперировании знаниями и умениями. |

## 3. Оценочные средства

| № п/п | Наименование оценочного средства | Краткая характеристика оценочного средства | Представление оценочного средства в ФОС |
|---|---|---|---|
| 1 | Контрольная (самостоятельная) работа (КР) | Средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу | Контрольные задания (пример) |
| 2 | Расчетно-графическая работа (РГР) | Средство проверки умений применять полученные знания по заранее определенной методике для решения задач или заданий по модулю или дисциплине в целом. | Комплект заданий для выполнения расчетно-графической работы |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | Устный опроссо-беседование, (УО) | Средство контроля, организованное как специальная беседа педагогического работника с обучающимся на темы, связанные с изучаемой дисциплиной, и рассчитанное на выяснение объема знаний обучающегося по определенному разделу, теме, проблеме и т.п. | Вопросы по темам/разделам дисциплины |
| 4 | Тест (Т) | Система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и уменийобучающегося. | Вариант теста |
| 5 | Экзаменационные билеты (ЭБ) | Средство проверки знаний, умений, навыков. Может включать комплекс теоретических вопросов, задач, практических заданий. | Экзаменационные билеты. |

## 3.1.Текущий контроль

Оценочные средства текущего контроля успеваемости включают контрольные вопросы и задания в форме бланкового тестирования для контроля освоения обучающимися разделов дисциплины, прием РГР.

**Содержание расчетно-графической работы.**

**Расчетно-графическая работа №1 по линейной алгебре.**
Краткое содержание расчетно-графической работы:
Матрицы и определители. Решение систем линейных алгебраических уравнений методами Гаусса, Крамера и обратной матрицы.
**Расчетно-графическая работа №2 по векторной алгебре.**
Краткое содержание расчетно-графической работы:
Векторы, действия над векторами. Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов.
**Расчетно-графическая работа №3 по аналитической геометрии.**
Краткое содержание расчетно-графической работы:
Различные виды уравнений прямой и плоскости. Взаимное расположение прямых на плоскости, плоскостей в пространстве.

**Комплект заданий**
**для выполнения расчетно-графических работ (РГР)**
по дисциплине **«Линейная алгебра»**

**РГР №1, часть 1**

Задание №1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 2\\ 4 & 0 & -3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & -3 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

Выполнить действия: $A^2+8B^T$.

Задание №2. Продолжить данное матричное равенство $(2A+3B)^2-4A^2-6AB=\ldots$

и проверить его для матриц $A$ и $B$ из первого задания.

Задание №3. Вычислить определитель двумя способами: разложением по первой строке и разложением по первому столбцу.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Задание №4. Для данной матрицы найти обратную матрицу. Сделать проверку.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задание №5. Решить матричное уравнение $AXB = C$ (найти $X$). Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задание №6. Найти ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 8 & 9 & 15 \\ 3 & -8 & 2 & 6 & 20 \end{pmatrix}.$$

**РГР №1, задания по решению систем линейных алгебраических уравнений**

Задание №1. Решить систему методом Крамера. Сделать проверку.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}.$$

Задание №2. Решить систему из №1 методом обратной матрицы.

Задание №3. Решить систему из №1 методом Гаусса.

Задание №4. Решить неоднородную систему методом Гаусса. Найти общее решение и частное решение.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 4x_4 = 11 \end{cases}$$

Задание №5. Решить однородную систему методом Гаусса. Найти общее решение и ФСР.

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 9x_3 - 9x_4 = 0 \\ 4x_1 - 5x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 7x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}.$$

**РГР №1, часть 2**

Задание №1. Показать, что векторы $\bar{m}$, $\bar{n}$, $\bar{p}$ образуют базис в пространстве и разложить вектор $\bar{a}$ по этому базису: $\bar{m} = (1, -1, 2)$, $\bar{n} = (2, 0, 3)$, $\bar{p} = (-2, -1, 1)$, $\bar{a} = (5, -4, 13)$.

Задание №2. Даны векторы $\bar{m}$ и $\bar{n}$. Выяснить – коллинеарны ли векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

$\bar{m} = (28, -8, 8)$, $\bar{n} = (-21, 6, -6)$, $\bar{a} = 2\bar{m} + \bar{n}$, $\bar{b} = 2\bar{n} - \bar{m}$.

Задание №3. Найти $|\bar{a}|$, если $|\bar{m}| = 6\sqrt{2}$, $|\bar{n}| = 2$, $(\hat{\bar{m}, \bar{n}}) = 135^\circ$, $\bar{a} = 6\bar{n} - \bar{m}$.

Задание №4. Дан $\Delta ABC$. Найти $\angle B$, если $A(1; -1; 2)$, $B(3; 3; 2)$, $C(7; 1; 2)$.

Задание №5. При каких `$x$` векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны?

$\bar{a} = (x; 1; -4)$, $\bar{b} = (x - 3; 12; x)$.

Задание №6. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

$\bar{a} = 2\bar{m} - 5\bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} + \bar{n}$, $|\bar{m}| = 12$, $|\bar{n}| = 3$, $(\hat{\bar{m}, \bar{n}}) = \dfrac{\pi}{6}$.

Задание №7. Найти площадь треугольника ABC, если A(7; 2; -3), B(6; 5; 1), C(0; -2; -7).

Задание №8. Даны векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Выяснить – компланарны ли векторы. Если векторы не компланарны, то найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и определить – какую тройку они образуют.

$\bar{a}(1; -1; 5)$, $\bar{b}(2; 4; -2)$, $\bar{c}(3; 0; 1)$.

Задание №9. Для линейного оператора $A$ заданы образы базисных элементов $A\bar{e}_1$, $A\bar{e}_2$, $A\bar{e}_3$. Записать матрицу оператора $A$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ и найти образ элемента $\bar{x}$.

$A\bar{e}_1 = 7\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 - 2\bar{e}_3$, $A\bar{e}_2 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 4\bar{e}_3$, $A\bar{e}_3 = 2\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$,

$\bar{x} = 2\bar{e}_1 - 4\bar{e}_2 + \bar{e}_3$.

Задание №10. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$.

**РГР № 1, часть 3**

Задание №1. Прямая $l_1$ проходит через точку $A$ параллельно вектору $\bar{q}$. Прямая $l_2$ проходит через точку $B$ перпендикулярно вектору $\bar{n}$. Найти точку пересечения прямых и угол между ними, если $A(3;5),\ \bar{q}(1;3),\ B(0;5),\ \bar{n}(-3;4)$.

Задание №2. Дана прямая $l_1$. Прямая $l_2$ проходит через точки $A$ и $B$. Найти расстояние от точки пересечения прямых $l_1$ и $l_2$ до прямой $l_3$.

$$l_1:\begin{cases} x=-8t-3 \\ y=3t+4, \end{cases} A(4;0),\ B(7;3),\quad l_3: 9x-12y+2=0.$$

Задание №3. Найти расстояние от точки $M_0$ до плоскости $\alpha$, проходящей через точку $A$ перпендикулярно вектору $\bar{n}$, если $M_0(0;\ 1;\ 7),\ A(2;\ -1;\ 4),\ \bar{n}(6;\ 22;\ -3)$.

Задание №4. Найти угол между плоскостью $\alpha$ и плоскостью $\beta$, проходящей через точки $A, B$ и $C$, если $\alpha: 5x+y+4z-28=0,\quad A(5;2;5),\ B(3;7;0),\ C(-4;-3;-1)$.

Задание №5. Записать канонические уравнения прямой, заданной общими уравнениями.

$$\begin{cases} x+2y-9z-10=0; \\ 3x+4y+8z-24=0. \end{cases}$$

Задание №6. Найти точку пересечения прямой $l$ и плоскости $\alpha$ и угол между ними.

$$l:\frac{x+2}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{-2};\quad \alpha: x+2y-3z-12=0.$$

Задание №7. Прямая $l_1$ проходит через точки $A$ и $B$. Прямая $l_2$ проходит через точку $M$ перпендикулярно плоскости $\alpha$. Найти угол между прямыми $l_1$ и $l_2$ и выяснить – лежат ли они в одной плоскости или скрещиваются.

$$A(9;-3;1),\ B(4;4;-5),\ M(-1;11;-11),\quad \alpha: 2x+3y-z-1=0.$$

Задание №8. Для данной кривой $\frac{(x+3)^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1$ указать фокусы, эксцентриситет, директрисы. Построить кривую, изобразить фокусы, директрисы.

Задание №9. Привести уравнение кривой $9x^2-25y^2-18x+200y-616=0$ к каноническому виду и построить кривую.

**Контрольные задания (примеры)**

**Вариант.**

1. Найти значения матричного многочлена $F(A)$

$$f(x)=-x^3+2x^2-x+3, A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Найти ранг матрицы приведением к ступенчатому виду $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 8 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 7 & 2 & 4 \\ -8 & 2 & -6 & -3 & -13 \\ 11 & -3 & 13 & 5 & 17 \end{pmatrix}$

3. Вычислить определитель приведением к ступенчатому виду $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix}$

4. Найти матрицу, обратную данной (а). Решить матричное уравнение (б)

(а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$ (б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

5. Решить систему уравнений. Указать общее и одно частное решение (а).

Решить систему с помощью обратной матрицы и по формулам Крамера (б)

(а) $\begin{cases} 4x_1 + 9x_2 - 5x_3 - 8x_4 = 5 \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$ (б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -7 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 13 \end{cases}$

**Вариант**

1. Расписать разложение вектора $\vec{x}$ по векторам $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$

$\vec{x} = \{5, -12, 1\}$, $\vec{p} = \{1, -3, 0\}$, $\vec{q} = \{1, -1, 1\}$, $\vec{r} = \{0, -1, 2\}$

2. Коллинеарны ли векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$?

$\vec{a} = \{2, 0, 1\}$, $\vec{b} = \{-2, 3, 1\}$, $\vec{p} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{q} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$

3. Дана пирамида с вершинами в точках $A_1A_2A_3A_4$.

$A_1(-2, 4, 8)$, $A_2(4, -1, 2)$, $A_3(-8, 7, 10)$, $A_4(-3, 4, -2)$

Найти:

а) угол между ребрами $A_1A_2$, $A_1A_4$

б) объем пирамиды

в) длину высоты опущенной на грань $A_1A_2A_3$

г) найти длину медианы, проведенную из вершины $A_1$ к ребру $A_2A_3$

4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\alpha$ – угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$

$\vec{a} = \overrightarrow{2p} + \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - \overrightarrow{3q}$, $|\overrightarrow{p}| = 2$, $|\overrightarrow{q}| = 2$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

**Вариант**

1. Найти расстояние от точки $M_0$ до плоскости $(M_1M_2M_3)$:

$M_0(-9;10;2)$, $M_1(0;7;-4)$, $M_2(4;8;-1)$, $M_3(-2;1;3)$

2. Выписать каноническое уравнение прямой: $\begin{cases} x+y+z-2=0 \\ x-y-3z+6=0 \end{cases}$

3. Найти точку пересечения прямой и плоскости: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-4}$ и $x+y+2z-9=0$.

4. Найти точку $P_1$ симметричную точке $P$ относительно прямой $l$: $P(0;-1;3)$ и $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$.

5. Написать уравнение плоскости $\alpha$ проходящей через точку $M_0$ и перпендикулярно прямой $(M_1M_2)$: $M_0(3;2;0)$, $M_1(4;1;5)$, $M_2(2;-1;4)$.

6. Найти косинус угла между плоскостями $\alpha_1$ и $\alpha_2$:

$\alpha_1 : 3x - y + 3 = 0$, $\alpha_2 : x - 2y + 5z - 10 = 0$

**Вариант заданий промежуточного теста**

1.1. Найти ранг матрицы приведением к ступенчатому виду $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 8 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 7 & 2 & 4 \\ -8 & 2 & -6 & -3 & -13 \\ 11 & -3 & 13 & 5 & 17 \end{pmatrix}$

**1.2.** Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \square X = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

**1.3.** Решить систему по формулам Крамера $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -7 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 13 \end{cases}$

**2.1.** Написать разложение вектора $\vec{x}$ по векторам $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ $\vec{x} = \{5, -12, 1\}$, $\vec{p} = \{1, -3, 0\}$, $\vec{q} = \{1, -1, 1\}$, $\vec{r} = \{0, -1, 2\}$

**2.2.** Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\alpha$ – угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$

$\vec{a} = \overrightarrow{2p} + \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - \overrightarrow{3q}$, $|\overrightarrow{p}| = 2$, $|\overrightarrow{q}| = 2$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$

2.3. Дана пирамида с вершинами в точках $A_1A_2A_3A_4$. $A_1(6,1,3)$, $A_2(6,-2,-3)$, $A_3(2,2,0)$, $A_4(-5,1,0)$

Найти длину медианы, проведенную из вершины $A_1$ к ребру $A_2A_3$

3.1. Найти точку пересечения прямой и плоскости: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-4}$ и $x+y+2z-9=0$.

3.2. Найти точку $P_1$ симметричную точке $P$ относительно прямой $l$: $P(0;-1;3)$ и $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$.

3.3. Написать уравнение плоскости $\alpha$ проходящей через точку $M_0$ и перпендикулярно прямой $(M_1M_2)$: $M_0(3;2;0)$, $M_1(4;1;5)$, $M_2(2;-1;4)$.

**4.1.** Дана кривая второго порядка $x^2+4y^2-12x+16y+16=0$. Получить каноническое уравнение кривой и построить .ее

**4.2.** Составить матрицу перехода от базиса $e_1,e_2,e_3$ к базису $e_1',e_2',e_3'$, если
$\vec{e}_1'=2\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3;\ \vec{e}_2'=\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3;\ \vec{e}_3'=\vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_3$

**Критерии оценки:**
- оценка «зачтено» выставляется студенту, если он регулярно в течение семестра представлял решения задач, выполнил полностью все задания и их защитил, ответив на вопросы преподавателя;
- оценка «не зачтено» выставляется студенту, если он нерегулярно в течение семестра представлял решения задач, выполнил задания не полностью или вообще не представлял работы на проверку, допускает существенные неточности в ответах на вопросы преподавателя.

Для проведения текущего контроля знаний студентов в дистанционном формате в разработанных кафедрой «Математика» онлайн-курсах имеются промежуточные (пробные) тесты.

## 3.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация - (экзамен) проводится по билетам в устной форме.
Время для подготовки ответа на вопросы не более 45 мин.
Билет включает теоретический вопрос и задачи.
Комплекты экзаменационных билетов хранятся на кафедре «Математика».
**Типовые варианты билетов прилагаются**.

**Комплект вопросов**
по дисциплине
**«Линейная алгебра»**

1. Матрицы, типы матриц.
2. Операции с матрицами, их свойства.
3. Умножение прямоугольных матриц.
4. Матричная форма записи системы линейных алгебраических уравнений.
5. Определители и их свойства.
6. Понятие определителя. Миноры и алгебраические дополнения.
7. Системы линейных алгебраических уравнений, основные понятия и определения.

8. Правило Крамера решения систем линейных уравнений.
9. Обратная матрица и её вычисление. Условие существования обратной матрицы.
10. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом обратной матрицы.
11. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
12. Решение произвольных систем линейных уравнений методом Гаусса.
13. Ранг матрицы. Теорема Кронекера – Капелли.
14. Однородные системы линейных уравнений. Критерий существования нетривиальных решений.
15. Понятие вектора и линейные операции над векторами, свойства операций.
16. Линейная комбинация векторов.
17. Линейная независимость и линейная зависимость геометрических векторов. Критерий линейной зависимости.
18. Понятие базиса. Координаты вектора.
19. Ортонормированный базис. Разложение вектора по векторам базиса.
20. Упорядоченная тройка векторов.
21. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов в ортонормированном базисе.
22. Условия ортогональности, коллинеарности и компланарности векторов.
23. Линейные пространства.
24. Матрица перехода от базиса к базису.
25. Собственные векторы и собственные значения матрицы.

**Аналитическая геометрия**

1. Системы координат. Декартовы прямоугольные координаты на плоскости и в пространстве.
2. Полярная система координат.
3. Различные типы уравнений плоскости и прямой.
4. Вычисление расстояний между двумя точками, точкой и прямой, точкой и плоскостью.
5. Вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми.
6. Вычисление углов между двумя прямыми, прямой и плоскостью, двумя плоскостями.
7. Кривые второго порядка их геометрические свойства и уравнения. Приведение кривой второго порядка к каноническому виду.
8. Канонические уравнения эллипса, гиперболы, параболы.
9. Уравнение поверхности второго порядка.
10. Канонические уравнения сферы, эллипсоида, конусов, гиперболоидов, параболоидов.

## Типовые варианты билетов

по дисциплине **«Линейная алгебра»**

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
**(МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХ)**

Факультет базовых компетенций, Кафедра «Математика»
Дисциплина «Линейная алгебра»
Курс 1, семестр 1

**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ**

1. Определители и их свойства.
2. Решить матричное уравнение $XB = A$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Решить систему методом обратной матрицы $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 = 12 \end{cases}$.
4. Даны векторы $\bar{a} = (-5,9,8)$, $\bar{b} = (-3,1,-2)$, $\bar{c} = (-8,10,-10)$. Проверить – компланарны ли они. Если нет, найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.
5. Найти угол между векторами $\bar{a} = (1,-2,-2)$ и $\bar{b} = (2,0,1)$.

Утверждено на заседании кафедры математики «03» 05 2023 г., протокол № 10

И.о. зав. кафедрой Н.В. Васильева /_____/

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
**(МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХ)**

Факультет базовых компетенций, Кафедра «Математика»
Дисциплина «Линейная алгебра»
Курс 1, семестр 1

**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ**

1. Линейная комбинация векторов. Базис. Координаты вектора.
2. Вычислить определитель матрицы $C = A^T$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Решите систему уравнений методом Гаусса $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 12, \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$
4. Показать, что векторы $\bar{m} = (1,-1,2)$, $\bar{n} = (2,0,3)$, $\bar{p} = (-2,-1,1)$ образуют базис в пространстве.
5. Дано общее уравнение прямой $-2x + 3y - 5 = 0$. Написать: уравнение прямой с угловым коэффициентом; уравнение прямой в отрезках; нормальное уравнение прямой.

Утверждено на заседании кафедры математики «03» 052023 г., протокол № 10

И.о. зав. кафедрой Н.В. Васильева /_____/

Для проведения промежуточного контроля знаний студентов в дистанционном формате в разработанных кафедрой «Математика» онлайн-курсах имеются итоговые тесты.