Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Максимов Алексей Борисович
Должность: директор департамента по образовательной политике
Дата подписания: 01.11.2023 11:20:05
Уникальный программный ключ:
8db180d1a3f02ac9e60521a5672742735c18b1d6

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
Московский политехнический университет

УТВЕРЖДАЮ
И.о. декана транспортного факультета
_____ /М.Н. Лукьянов/
«__» _____ 2022 г.

Рабочая программа дисциплины
Основы вариационного исчисления

Специальность

23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства

Профиль подготовки (образовательная программа)
«Компьютерный инжиниринг в автомобилестроении»

Квалификация (степень) выпускника
инженер

Форма обучения
Очная

Москва 2022

1. Цели освоения дисциплины

К **основным целям** освоения дисциплины «Основы вариационного исчисления» следует отнести:

- воспитание у студентов общей математической культуры;
- приобретение студентами широкого круга математических знаний, умений и навыков;
- развитие способности студентов к индуктивному и дедуктивному мышлению наряду с развитием математической интуиции;
- умение студентами развивать навыки самостоятельного изучения учебной и научной литературы, содержащей математические сведения и результаты;
- - формирование у студента требуемого набора компетенций, соответствующих его направлению подготовки и обеспечивающих его конкурентоспособность на рынке труда.

К **основным задачам** освоения дисциплины «Основы вариационного исчисления» следует отнести:

- освоение студентами основных понятий, методов, формирующих общую математическую подготовку, необходимую для успешного решения важных для практических приложений задач оптимизации;
- подготовку студентов к деятельности в соответствии с квалификационной характеристикой бакалавра по направлению, в том числе формирование умений использовать освоенные математические методы в профессиональной деятельности.

2. Место дисциплины в структуре ООП специалитета

Дисциплина «Основы вариационного исчисления» относится к дисциплинам части, формируемой участниками образовательных отношений образовательного блока Б1. Ее изучение базируется на дисциплине «Математика». Дисциплина обеспечивает изучение дисциплин:

- физика;
- теоретическая механика.
- сопротивление материалов;
- прикладная теория колебаний;
- строительная механика машин;
- метод конечных элементов;
- механика композиционных материалов;
- статистическая механика.
- оптимальное проектирование;
- теория упругости;
- теория пластичности;
- теория ползучести;
- основы физики прочности и механика разрушения;

- динамика машин;
- вычислительная механика.

В дисциплинах по выбору студента:

- уравнения математической физики;
- устойчивость механических систем;
- устойчивость деформируемых систем;
- численные методы;
- элементы математического моделирования физических процессов.

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

В результате освоения дисциплины у обучающихся формируются следующие компетенции и должны быть достигнуты следующие результаты обучения как этап формирования соответствующих компетенций:

Код компетенции	**В результате освоения образовательной программы обучающийся должен обладать**	**Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине**
УК-1	Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	**знать:** • актуальные проблемы современного научного и технического развития, философские проблемы саморазвития и самореализации человека в области математики и технических наук **уметь:** • абстрактно мыслить, обобщать, систематизировать и анализировать полученную информацию **владеть:** • на основе освоения основных положений, законов и методов математики владеть способностью к абстрактному мышлению, анализу, синтезу информации

4. Структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **4** зачетные единицы, т.е. **72** академических часа (из них **36** часов – самостоятельная работа студентов).

Дисциплина «Основы вариационного исчисления» изучается на втором курсе в четвертом семестре. При этом на лекции выделяется **1** час в неделю (**18** часов), на практические занятия – **1** час в неделю (**18** часов), форма контроля - зачет.

Структура и содержание дисциплины «Основы вариационного исчисления»» по срокам и видам работы отражены в Приложении 1.

Содержание разделов дисциплины

Введение

Предмет, задачи и содержание дисциплины. Основные этапы развития дисциплины. Структура курса, его место и роль в подготовке специалиста, связь с другими дисциплинами.

Раздел 1. Основные понятия вариационного исчисления. Функционал, зависящий от функции одной переменной, вариация функции (аргумента функционала). Перестановочность операций варьирования и дифференцирования, варьирования и интегрирования. Непрерывный и линейный функционал. Вариация функционала. Экстремум функционала: абсолютный и относительный (локальный). Основная лемма вариационного исчисления. Необходимое условие экстремума. Вариационная задача с неподвижными границами (простейшая вариационная задача). Уравнение Эйлера. Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера. Задачи о брахистохроне и о наименьшей площади поверхности вращения.

Раздел 2. Обобщения простейшей вариационной задачи. Функционалы, зависящие от нескольких функций одной переменной. Функционалы с производными высших порядков. Уравнение Эйлера–Пуассона. Функционалы, зависящие от функций нескольких переменных. Уравнение Эйлера–Остроградского. Вариационная задача со свободными концами. Вариационная задача с подвижными концами. Условия трансверсальности.

Раздел 3. Вариационные задачи на условный экстремум. Задачи на условный экстремум с конечными и интегральными связями. Изопериметрическая задача.

Раздел 4. Прямые вариационные методы. Метод Ритца (Релея–Ритца). Метод Бубнова–Галёркина. Идея метода конечных элементов. Применение вариационных методов к задаче об изгибе стержня.

5. Образовательные технологии, применяемые при освоении дисциплины

Методика преподавания дисциплины «Основы вариационного исчисления» и реализация компетентностного подхода в изложении и восприятии материала предусматривают использование следующих активных и интерактивных форм проведения групповых, индивидуальных, аудиторных занятий в сочетании с внеаудиторной работой с целью формирования и развития профессиональных навыков обучающихся:

– защита и индивидуальное обсуждение выполняемых этапов расчетно-графических работ;

- привлечение лучших студентов к консультированию отстающих.

– подготовка, представление и обсуждение презентаций на семинарских занятиях;

– организация и проведение текущего контроля знаний студентов в форме бланкового тестирования;

– проведение интерактивных занятий по процедуре подготовки к интернет-тестированию на сайтах: *i-exam.ru, fepo.ru;*

– использование интерактивных форм текущего контроля в форме аудиторного и внеаудиторного интернет-тестирования;

итоговый контроль состоит в устном экзамене по математике с учетом результатов выполнения самостоятельных работ.

Удельный вес занятий, проводимых в интерактивных формах, определен главной целью образовательной программы, особенностью контингента обучающихся и содержанием дисциплины «Высшая математика» и в целом по дисциплине составляет 30% аудиторных занятий. Занятия лекционного типа составляют 50 % от объема аудиторных занятий.

6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

В процессе обучения используются следующие оценочные формы самостоятельной работы студентов, оценочные средства текущего контроля успеваемости и промежуточных аттестаций:

- две расчетно-графические работы.

- две самостоятельных (контрольных) работы в аудитории.

Расчетно-графическая работа № 1. Функционалы, зависящие от функции одной переменной.

Краткое содержание и этапы расчетно-графической работы:

определение вариации функционала; нахождение экстремали функционала; нахождение экстремали функционала, удовлетворяющей граничным условиям; вариационная задача со свободными концами; вариационная задача на условный экстремум.

Расчётно-графическая работа №2. Функционалы с производными высших порядков.

Краткое содержание и этапы расчетно-графической работы:

нахождение семейства экстремалей функционала; нахождение экстремали функционала, содержащего производные высших порядков, удовлетворяющей граничным условиям; задача со свободными концами, задача с подвижными границами, задача на условный экстремум, решение задачи об изгибе стержня методами Бубнова - Галеркина и Ритца.

Оценочные средства текущего контроля успеваемости включают контрольные вопросы и задания в форме бланкового тестирования для контроля освоения обучающимися разделов дисциплины, прием РГР.

Образцы тестовых заданий, заданий РГР, контрольных вопросов и заданий для проведения текущего контроля, экзаменационных билетов приведены в Приложении 2.

6.1. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине «Основы вариационного исчисления»

6.1.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции

Код Компетенции	В результате освоения образовательной программы обучающийся должен обладать
УК-1	Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий

В процессе освоения образовательной программы данные компетенции, в том числе их отдельные компоненты, формируются поэтапно в ходе освоения обучающимися дисциплины в соответствии с учебным планом и календарным графиком учебного процесса.

6.1.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций, формируемых по итогам освоения дисциплины, описание шкал оценивания

Показателем оценивания компетенций на различных этапах их формирования является достижение обучающимися планируемых результатов обучения по дисциплине.

УК -1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий				
Показатель	**Критерии оценивания**			
	2	**3**	**4**	**5**

знать: актуальные проблемы современного научного и технического развития, философские проблемы саморазвития и самореализации человека в области математики и технических наук	Обучающийся демонстрирует полное отсутствие или недостаточное соответствие знаний контролируемых разделов математики: не способен аргументированно и последовательно излагать материал, неправильно отвечает на дополнительные вопросы или затрудняется с ответом	Обучающийся демонстрирует неполное соответствие знаний программе: допускаются ошибки, проявляется недостаточное, поверхностное знание теории, сути методов. Для получения правильного ответа требуются уточняющие вопросы.	Обучающийся демонстрирует достаточно глубокие знания контролируемых разделов дисциплины, отвечает на все вопросы, в том числе дополнительные. В то же время при ответе допускает несущественные погрешности или дает недостаточно полные ответы	Обучающийся демонстрирует полное соответствие знаний программе дисциплины, логично и аргументированно отвечает на все вопросы, в том числе дополнительные, показывает высокий уровень теоретической подготовки
уметь: абстрактно мыслить, обобщать, систематизировать и анализировать полученную информацию	Обучающийся показывает недостаточное умение применять теорию к решению предлагаемых задач, допускает грубые ошибки при решении задач или вообще решения задач отсутствуют, неправильно отвечает на дополнительные вопросы, связанные с изучавшимися в курсе математическими методами и моделями или затрудняется с ответом	Обучающийся демонстрирует неполное соответствие следующих умений: решение задач, умение пользоваться вариационными методами и принципами. В решении задач могут содержаться грубые ошибки, проявляется недостаточное умение применять теорию к решению предлагаемых задач.	Обучающийся демонстрирует частичное соответствие следующих умений: применять теоретические методы к решению задач. Умения освоены, но допускаются незначительные ошибки, неточности, затруднения при решении задач, не влияющие на общий ход решения	Обучающийся демонстрирует умение применять теорию к решению предлагаемых задач, правильно строить решения математических задач. Свободно оперирует приобретенными умениями, применяет их в ситуациях повышенной сложности.
владеть: на основе освоения основных положений, законов и методов математики владеть способностью к абстрактному мышлению, анализу, синтезу информации	Обучающийся не владеет или в совершенно недостаточной степени владеет навыками применения теоретического аппарата и различных математических методов к решению задач	Обучающийся владеет математическими методами в неполном объеме, допускаются значительные ошибки, проявляется недостаточность владения математической техникой, испытывает значительные затруднения при применении навыков в новых ситуациях.	Обучающийся частично владеет вариационными методами и принципами, навыки освоены, но допускаются незначительные ошибки, неточности, затруднения при аналитических операциях, переносе умений на новые, нестандартные ситуации.	Обучающийся в полном объеме владеет вариационными методами и принципами, свободно применяет полученные навыки в ситуациях повышенной сложности.

Шкала оценивания результатов промежуточной аттестации и её описание:

Форма промежуточной аттестации: зачет.

Промежуточная аттестация обучающихся в форме зачета проводится по результатам выполнения всех видов учебной работы, предусмотренных учебным планом по данной дисциплине, при этом учитываются результаты текущего контроля успеваемости в течение семестра. Оценка степени достижения обучающимися планируемых результатов обучения по дисциплине проводится преподавателем, ведущим занятия по дисциплине методом экспертной оценки. По итогам промежуточной аттестации по дисциплине выставляется оценка «зачтено» или «не зачтено».

Шкала оценивания	**Описание**
Зачтено	Выполнены все **обязательные условия подготовки студента к промежуточной аттестации**, предусмотренные программой дисциплины. Студент демонстрирует соответствие знаний, умений, навыков приведенным в таблицах показателей, оперирует приобретенными знаниями, умениями, навыками, применяет их в ситуациях повышенной сложности. При этом могут быть допущены незначительные ошибки, неточности, затруднения при аналитических операциях, переносе знаний и умений на новые, нестандартные ситуации.
Не зачтено	Не выполнены **обязательные условия подготовки студента к промежуточной аттестации**, *предусмотренные программой дисциплины*, ИЛИ студент демонстрирует неполное соответствие знаний, умений, навыков приведенным в таблицах показателей, допускаются значительные ошибки, проявляется отсутствие знаний, умений, навыков по ряду показателей, студент испытывает значительные затруднения при оперировании знаниями и умениями при их переносе на новые ситуации.

Фонды оценочных средств представлены в приложении 2 к рабочей программе.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Высшая математика. Общая алгебра. Элементы тензорной алгебры : учебник и практикум для вузов / Т. Н. Фоменко. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 121 с. —
URL: https://urait.ru/bcode/454282

2. Толпегин, О. А. Математическое программирование. Вариационное исчисление: учебное пособие для вузов / О. А. Толпегин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2020. — 233 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-11755-4.
URL: https://urait.ru/bcode/446093

б) дополнительная литература:

1. Новак, Е. В. Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения : учебное пособие для вузов / Е. В. Новак, Т. В. Рязанова, И. В. Новак ; под общей редакцией Т. В. Рязановой. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 112 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-08358-3.
URL: https://urait.ru/bcode/472212

в) программное обеспечение и интернет-ресурсы:

Программное обеспечение не предусмотрено.

Полезные учебно-методические и информационные материалы представлены на сайтах:

http://exponenta.ru, *http://eqworld.ipmnet.ru/ru/info/mathwebs.htm.*

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» для освоения дисциплины:
www.matematikalegko.ru>studentu, www.i-exam.ru.

Интернет-ресурсы включают учебно-методические материалы, представленные на сайте электронно-библиотечной системы Издательства Лань (https://e.lanbook.com/).
http://function-x.ru/tests_higher_math.html Тесты по высшей математике.

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Материально – техническая база университета обеспечивает проведение всех видов занятий, предусмотренных учебным планом и соответствует действующим санитарным и противопожарным правилам и нормам.
Для проведения учебных занятий используются:
- лекционные аудитории и аудитории для проведения практических занятий, в том числе, оснащенные мультимедийным оборудованием для проведения аудиторных занятий (проектор, ноутбук, микрофон и т.д.);
- для работы со специализированным программным обеспечением во время интерактивных практических занятий имеются компьютерные классы университета.

9. Методические рекомендации для самостоятельной работы студентов

Наряду с задачами исследования экстремумов функций на практике часто возникает необходимость отыскания максимальных и минимальных значений

математических выражений более общего вида – так называемых функционалов.

Вариационное исчисление и является разделом математики, посвященным исследованию методов отыскания экстремумов функционалов, зависящих от одной или нескольких функций, при разного рода ограничениях, налагаемых на эти функции.

В настоящее время вариационные методы очень широко применяются в механике и физике.

Понятие функционала является обобщением понятия функции: если функция $y(x)$ - это зависимость числа от числа, то функционал $I[y(x)]$ - это зависимость числа от функции, он определен на множестве допустимых кривых.

Чтобы проследить изменение функционала при изменении аргумента вводится, прежде всего, понятие вариации функции - аргумента функционала.

Варьирование аргумента функционала означает переход от одной функции из класса допустимых для данного функционала к другой бесконечно близкой ей функции при том же значении x.

В этом состоит отличие варьирования от дифференцирования функций, которое, как известно, является мерой изменения одной и той же функции при изменении независимой переменной x.

Варьирование аргумента функционала δy аналогично приращению независимой переменной Δx при исследовании экстремумов функций.

Варьирование аргумента функционала – это новая математическая операция, перестановочная с операциями дифференцирования и интегрирования.

Аналогично, вариация функционала играет ту же роль при исследовании функционалов, что дифференциал функции при исследовании функций. Вариация функционала – это главная линейная часть приращения функционала.

При исследовании локального экстремума функционала выясняется, что необходимое условие экстремума функционала состоит в равенстве нулю его вариации $\delta I = 0$. Здесь опять проявляется аналогия с исследованием экстремумов функций. Действительно, необходимое условие экстремума функции в данной точке состоит в равенстве нулю производной функции в этой точке: $y'(x_0) = 0$.

Необходимо обязательно осмыслить и знать постановку и решение простейшей вариационной задачи – задачи с неподвижными границами, решение которой сводится к решению краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка – уравнения Эйлера, играющего фундаментальную роль в вариационном исчислении.

Вторая часть курса связана с разного рода обобщениями простейшей вариационной задачи. Это задачи отыскания экстремумов функционалов, содержащих несколько функций, функционалов, зависящих от производных высшего порядка, функционалов, зависящих от функций нескольких независимых переменных, а также вариационная задача со свободными концами и вариационная задачу с подвижными границами.

Надо четко представлять общность и различия в постановках задач, уметь составлять уравнения Эйлера – Пуассона, Эйлера – Остроградского. Решение этих уравнений и, конечно, уравнения Эйлера при соответствующих краевых условиях требует от студента умения решать дифференциальные уравнения различного типа.

При решении вариационной задачи с подвижными границами надо понимать геометрический смысл условий трансверсальности: последние устанавливают связь между угловыми коэффициентами касательных к заданным кривым и экстремали в граничных точках экстремали.

Важными для приложений являются вариационные задачи на условный экстремум - задачи, в которых требуется найти экстремум функционала, определенного на классе допустимых функций, на которые, кроме граничных условий, наложены некоторые дополнительные условия (связи). Следует при этом освоить технику применения метода неопределённых множителей Лагранжа.

Во многих случаях задачу интегрирования дифференциального уравнения при соответствующих краевых условиях можно заменить равносильной вариационной задачей отыскания функции, сообщающей экстремальное значение некоторому функционалу.

Например, при обычных краевых условиях можно свести интегрирование уравнений статической теории упругости к отысканию минимума потенциальной энергии деформации.

Вариационные задачи допускают их прямое решение, то есть приближенное решение, сводящее исходные уравнения непосредственно к конечным системам алгебраических уравнений. Такие методы и называются прямыми. Их применение связано с использованием общих вариационных принципов механики. В задачах механики деформируемого твердого тела прямые методы решения базируются на аппроксимации деформированного или напряженного состояния.

Наиболее универсальными и распространенными прямыми методами приближенного решения основной задачи вариационного исчисления – задачи отыскания экстремума функционалов являются метод Ритца и метод Бубнова – Галеркина. Студенту следует обязательно разобраться в применении этих методов к решению задачи из расчетно – графической работы об изгибе стержня при различных граничных условиях, так как они и сейчас (спустя более 100 лет после их появления) являются весьма распространенными «рабочими» методами механики.

Студент в процессе освоения курса должен овладеть знанием вариационных методов и принципов и уметь применять их к решению простейших типовых задач, относящихся к прикладной механике.

10. Методические рекомендации для преподавателя

Прежде всего, следует обратить внимание студентов на то, что практически весь изучаемый ими материал является для них новым, не изучавшимся ни в программе средней школы, ни в классических разделах высшей математики

на первом курсе. Однако он вполне может быть успешно изучен, если студенты будут посещать занятия, своевременно выполнять домашние задания и пользоваться (при необходимости) системой плановых консультаций в течение каждого семестра.

Вошедшие в курс вариационного исчисления разделы практически ориентированы, так как имеют широкое распространение для решения разного рода задач в широком смысле оптимального управления. Их освоение поможет студентам успешно применять накопленные знания в профессиональной деятельности.

Необходимо с самого начала занятий рекомендовать студентам основную и дополнительную литературу, а в конце семестра дать список вопросов для подготовки к экзамену.

На первом занятии по дисциплине обязательно проинформировать студентов о виде и форме промежуточной аттестации по дисциплине, сроках её проведения, условиях допуска к промежуточной аттестации, применяемых видах промежуточного контроля.

Соображения и рекомендации, приведенные в п. 9 рабочей программы для студентов, должны быть четко сформулированы и изложены именно преподавателем на лекциях, практических занятиях и консультациях.

Изложение теоретического материала должно сопровождаться иллюстративными примерами, тщательно отобранными преподавателем так, чтобы технические трудности и выкладки при решении задачи не отвлекали от главного: осмысления идеи и сути применяемых методов. Следует всегда указывать примеры практического применения рассмотренных на занятиях уравнений и формул.

Практические занятия должны быть организованы преподавателем таким образом, чтобы оставалось время на периодическое выполнение студентами небольшой самостоятельной работы в аудитории для проверки усвоения изложенного материала.

Преподаватель, ведущий практические занятия, должен согласовывать учебно – тематический план занятий с лектором, использовать единую систему обозначений.

Преподавателю следует добиваться систематической непрерывной работы студентов в течение семестра, необходимо выявлять сильных студентов и привлекать их к научной работе, к участию в разного рода олимпиадах и студенческих научно-технических конференциях, и конкурсах.

Студент должен ощущать заинтересованность преподавателя в достижении конечного результата: в приобретении обучающимися прочных знаний, умений и владения накопленной информацией для решения задач в профессиональной деятельности.

Приложение 1

Структура и содержание дисциплины
«Основы вариационного исчисления»
по специальности
23.05.01 Наземные транспортно – технологические средства
Профиль подготовки
Компьютерное моделирование транспортных средств
Квалификация - инженер

n/n	Раздел	Семестр	Неделя Семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов, и трудоемкость в часах					Виды самостоятельной работы Студентов					Формы атте-стации	
				Л	П/С	Лаб	СРС	КСР	К.Р.	К.П.	РГР	Реферат	К/р	Э	З
Четвертый семестр															
1.1	Введение. **Раздел 1. Основные понятия вариационного исчисления.** Понятия функционала, зависящего от функции одной переменной, вариации аргумента функционала, вариации функционала. Постановка задачи о брахистохроне.	4	1	2			2								
1.2	Решение вариационной задачи с неподвижными границами. **Выдача заданий РГР № 1.**	4	2		2		2				+				
1.3	Экстремум функционала. Необходимое условие экстремума. Постановка и решение простейшей вариационной задачи. Уравнение Эйлера. Различные формы записи уравнения Эйлера	4	3	2			2								
1.4	Решения задачи с неподвижными гра-	4	4		2										

	ницами. Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера.						2								
1.5	**Раздел 2. Обобщения простейшей вариационной задачи.** Обобщения простейшей вариационной задачи. Функционал, содержащий несколько функций одной переменной.	4	5	2			2								
1.6	Задача с неподвижными границами для функционала, содержащего несколько функций одной переменной **Выдача заданий расчётно-графической работы №2. Функционалы с производными высших порядков.**	4	6		2		2				+				
1.7	Функционал, содержащий производные высших порядков. Уравнение Эйлера-Пуассона. **Самостоятельная работа № 1 «Нахождение экстремалей функционала, зависящего от функции одной переменной»**	4	7	2			2						+		
1.8	Задача с неподвижными границами для функционала, содержащего производные высших порядков. Решения уравнения Эйлера-Пуассона	4	8		2		2								
1.9	Функционал, содержащий функции нескольких переменных. Уравнение Эйлера-Остроградского. Вариационный вывод волнового уравнения. Вариационная задача со свободными концами.	4	9	2			2								
1.10	Решение вариационной задачи со свободными концами	4	10		2		2								
1.11	Вариационная задача с подвижными границами. Условия трансверсальности.	4	11	2			2								
1.12	Решения вариационной задачи с по-	4	12		2										

	движными границами. **Самостоятельная работа № 2 «Нахождение экстремалей функционала с производными высших порядков»**						2						+		
1.13	**Раздел 3. Вариационные задачи на условный экстремум.** Вариационная задача на условный экстремум с конечными связями. Метод неопределенных множителей Лагранжа.	4	13	2			2								
1.14	Решение вариационной задачи на условный экстремум с интегральными связями. Изопериметрические задачи	4	14		2		2								
1.15	**Раздел 4. Прямые методы вариационного исчисления.** Общность и различие методов..	4	15	2			2								
1.16	IРешение методом Ритца задачи об изгибе стержня Вариационный принцип возможных перемещений Лагранжа	4	16		2		2								
1.17	Метод Бубнова – Галеркина. Вывод полного вариационного уравнения изгиба стержня. Применение метода ортогонализации Бубнова – Галеркина к задаче об изгибе стержня.	4	17	2			2								
1.18	Обзорное практическое занятие	4	18		2		2								
	Форма аттестации		**19-21**												**З**
	Всего часов по дисциплине в четвертом семестре			**18**	**18**		**36**				**2 РГР**		**2 сам. раб.**		

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХ)

Направление подготовки

23.05.01 НАЗЕМНЫЕ ТРАНСПОРТНО – ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА

Профиль подготовки

Компьютерный инжиниринг в автомобилестроении

(Инженер)

Форма обучения: очная

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Основы вариационного исчисления

Москва, 2022 год

Таблица 1

ПОКАЗАТЕЛЬ УРОВНЯ СФОРМИРОВАННОСТИ КОМПЕТЕНЦИЙ

Основы вариационного исчисления					
ФГОС ВО 23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства (уровень специалитета) Профиль: «Компьютерный инжиниринг в автомобилестроении»					
В процессе освоения данной дисциплины студент формирует и демонстрирует следующие **общекультурные, общепрофессиональные, профессиональные компетенции**:					
КОМПЕТЕНЦИИ		**Перечень компонентов**	**Технология формирования компетенций**	**Форма оценочного средства****	**Степени уровней освоения компетенций**
ИНДЕКС	**ФОРМУЛИРОВКА**				
УК-1	Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	**знать:** математический аппарат вариационного исчисления и на этой основе развить способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу **уметь:** абстрактно мыслить, обобщать, систематизировать и анализировать полученную информацию **владеть:** на основе освоения основных методов вариационного исчисления и вариационных принципов способностью к абстрактному мышлению, анализу и синтезу информации	лекция, самостоятельная работа, семинарские занятия	УО РГР Т	**Базовый уровень** **-в**ладеет навыками работы с основными понятиями и методами в рамках дисциплины; - осознает необходимость повышения квалификации и самостоятельно овладевать знаниями в области профессиональной деятельности. **Повышенный уровень** - свободно владеет методами и принципами приобретения, использования и обновления более глубоких математических знаний; -владеет различными способами сбора, обработки и применения математической информации;

*- Сокращения форм оценочных средств см. в приложении 2 к РП.

Перечень оценочных средств по дисциплине

Основы вариационного исчисления

Таблица 2

№ п/п	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в ФОС
1	Контрольная (самостоятельная) работа (КР)	Средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу	Комплект контрольных заданий по вариантам
2	Расчетно-графическая работа (РГР)	Средство проверки умений применять полученные знания по заранее определенной методике для решения задач или заданий по модулю или дисциплине в целом.	Комплект заданий для выполнения расчетно-графической работы
3	Устный опрос собеседование, (УО)	Средство контроля, организованное как специальная беседа педагогического работника с обучающимся на темы, связанные с изучаемой дисциплиной, и рассчитанное на выяснение объема знаний обучающегося по определенному разделу, теме, проблеме и т.п.	Вопросы по темам/разделам дисциплины
4	Тест (Т)	Система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающегося.	Фонд тестовых заданий
5	Билеты к зачету (БкЗ)	Средство проверки знаний, умений, навыков. Может включать комплекс теоретических вопросов, задач, практических заданий.	Билеты. Шкала оценивания и процедура применения.
Промежуточная аттестация (ПА)		Зачет (З)	1) устно (У) 2) письменно (П)

Оформление и описание оценочных средств

1. Билеты к зачету

1.1. Назначение: Используются для проведения промежуточной аттестации по дисциплине "Основы вариационного исчисления".

1.2. Регламент зачета: - Время на подготовку тезисов ответов - до 45 мин.
- Способ контроля: устные ответы.

1.3. Шкала оценивания:

«Зачтено» - если выполнены все виды учебной работы, предусмотренные учебным планом. Студент демонстрирует соответствие знаний, умений, навыков, оперирует приобретенными знаниями, умениями, навыками, применяет их в ситуациях повышенной сложности. При этом могут быть допущены незначительные ошибки, неточности, затруднения при аналитических операциях, переносе знаний и умений на новые, нестандартные ситуации.

«Не зачтено» - если не выполнен один или более видов учебной работы, предусмотренных учебным планом. Студент демонстрирует неполное соответствие знаний, умений, навыков, допускаются значительные ошибки, проявляется отсутствие знаний, умений, навыков по ряду показателей, студент испытывает значительные затруднения при оперировании знаниями и умениями при их переносе на новые ситуации.

1.4. Комплекты билетов к зачету включают по каждому разделу 25-30 билетов (хранятся в центре математического образования).
Типовые варианты билетов прилагаются.

ОБРАЗЦЫ БИЛЕТОВ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХ)

Факультет базовых компетенций, кафедра математики
Дисциплина «Основы вариационного исчисления»
Образовательная программа 23.05.01 – Компьютерный инжиниринг в автомобилестроении
Курс 2, семестр 4

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

1. Понятие вариации функции. Перестановочность операций варьирования и дифференцирования, варьирования и интегрирования.
2. Найти семейство экстремалей функционала $\int_{x_0}^{x_1}(y''^2+9y'^2-2y\cos x)dx$.
3. Решить вариационную задачу со свободными концами для функционала:

$$\int_{\pi/2}^{\pi}(y'^2 - y^2 + 4y\cos 2x)dx, \qquad x = \pi/2, \quad x = \pi.$$

Утверждено на заседании кафедры математики «16» 05 2019 г., протокол № 10

Зав. кафедрой математики Г.С. Жукова /_____/

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХ)

Факультет базовых компетенций, кафедра математики
Дисциплина «Основы вариационного исчисления»
Образовательная программа 23.05.01 – Компьютерный инжиниринг в автомобилестроении
Курс 2, семестр 4

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 2

1. Понятие вариации функционала.
2. Найти экстремаль функционала $\int_0^1 (y''^2 - 48y)dx,$ удовлетворяющую граничным условиям: $y(0) = 1, \quad y'(0) = -4, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0.$
3. Найти семейство экстремалей функционала $\int_{x_0}^{x_1}(y'''^2 - y''^2 - 2ye^x)dx.$

Утверждено на заседании кафедры математики «16» 05 2019 г., протокол № 10

Зав. кафедрой математики Г.С. Жукова /_____/

Комплекты тестовых заданий и контрольных работ (Т, КР)

по дисциплине Основы вариационного исчисления
(наименование дисциплины)

В А Р И А Н Т № 1

ЗАДАНИЕ 1

Найти вариацию функционала $I = \int_{x_0}^{x_1}[2x^3y' + y'^2(x-1)]dx$.

Ответ	

ЗАДАНИЕ 2

Составить уравнение Эйлера для функционала

$$I = \int_{x_0}^{x_1}(y'^2 + 4y'\cos 2x - 2y\sin 3x)dx.$$

Ответ	

ЗАДАНИЕ 3

Найти семейство экстремалей функционала $I = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 - 4y^2 + 2xy)dx$.

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 0{,}25x$ 2) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + 0{,}25x$

3) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - 0{,}25x$ 4) $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + 0{,}25x$.

ЗАДАНИЕ 4

Найти решение вариационной задачи с неподвижными границами для функционала $I = \int_0^1 (y'^2 - 2ye^x)dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ: 1) $y = -e^x + (e-1)x$ 2) $y = -e^x + ex + 1$

3) $y = -e^x + (e-1)x + 1$ 4) $y = e^x + (1-e)x - 1$.

ЗАДАНИЕ 5

Составить уравнения Эйлера для функционала

$$I = \int_{x_0}^{x_1} (z'^2 + 4xz - 2yx^2 - y'^2)dx.$$

Ответ	

ЗАДАНИЕ 6

Составить уравнение Эйлера - Пуассона для функционала

$$I = \int_{x_0}^{x_1} (y''^2 - 2y'^2 + y^2 - 2ye^x)dx.$$

Ответ	

ЗАДАНИЕ 7

Найти семейство экстремалей функционала $I = \int_{x_0}^{x_1} (y''^2 - 16y^2)dx$.

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ: 1) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 x e^{2x} + C_4 x e^{-2x}$

2) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$

3) $y = C_1 e^{\sqrt{2}x} \cos \sqrt{2}x + C_2 e^{\sqrt{2}x} \sin \sqrt{2}x + C_3 e^{-\sqrt{2}x} \cos \sqrt{2}x + C_4 e^{-\sqrt{2}x} \sin \sqrt{2}x$

4) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 x \cos 2x + C_4 x \sin 2x$.

ЗАДАНИЕ 8

Найти решение вариационной задачи со свободным концом для функционала $I = \int_0^{\pi} (y'^2 - 2y' + 2y \sin x)dx, \quad y(0) = 0, \quad x = \pi.$

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y=\sin x$ 2) $y=-\sin x+x/\pi$ 3) $y=-\sin x$ 4) $y=-\sin x+2x$.

ЗАДАНИЕ 9

Для вариационной задачи с подвижными границами составить условия трансверсальности, если семейство экстремалей функционала $I=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx$ имеет вид $y=C_1x+C_2$, а уравнения заданных кривых:

$\varphi(x)=x^2+3,\quad \psi(x)=x-3.$

Ответ	

ЗАДАНИЕ 10

Для вариационной задачи на условный экстремум для функционала $I=\int_{x_0}^{x_1}(y'^2-9y^2)dx$ при наличии интегральной связи $K=\int_{x_0}^{x_1}(y^2-2x)dx$ составить расширенный функционал.

Ответ	

Оценка «отлично» выставляется студенту за 90 – 100% правильных ответов,
оценка «хорошо» - за не менее 75% правильных ответов;
оценка «удовлетворительно» - за не менее 50-60% правильных ответов;
оценка «неудовлетворительно» - за менее 50 % правильных ответов.

Комплект вопросов (УО)

1. Дайте определение понятия функционала.
2. Дайте определение понятия вариации функции. В чем его отличие от понятия дифференциала функции?
3. В чем заключается перестановочность операций варьирования и дифференцирования, варьирования и интегрирования.
4. Понятие непрерывности и линейности функционала.
5. Понятие вариации функционала. В чем особенность техники варьирования?
6. Формула для вычисления вариации функционала $I=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx.$
7. Понятия абсолютного и локального экстремумов функционала.
8. Основная лемма вариационного исчисления. Необходимое условие экстремума.
9. Постановка простейшей вариационной задачи для функционала $I=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx.$ Уравнение Эйлера. Понятие экстремали.
10. Различные формы записи уравнения Эйлера.

11. Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера для функционалов: $I=\int\limits_{x_0}^{x_1}F(x,y)dx,\quad I=\int\limits_{x_0}^{x_1}F(y')dx,\quad I=\int\limits_{x_0}^{x_1}F(x,y')dx,\quad I=\int\limits_{x_0}^{x_1}F(y,y')dx.$
12. Постановка задачи о брахистохроне. Запишите уравнение линии наискорейшего ската.
13. Задача о наименьшей площади поверхности тела вращения. Запишите уравнение цепной линии.
14. Задача с неподвижными границами для функционала, зависящего от нескольких функций $I=\int\limits_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',z,z',\ldots)dx.$
15. Задача с неподвижными границами для функционала, содержащего производные до *n*-го порядка включительно $I=\int\limits_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})dx.$
16. Уравнение Эйлера-Пуассона для функционала $I=\int\limits_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',y'')dx$ и в общем случае для функционала $I=\int\limits_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})dx.$
17. Функционал, содержащий функции нескольких переменных. Уравнение Эйлера-Остроградского.
18. Постановка задачи со свободными концами для функционала $I=\int\limits_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx.$
19. Какой вид имеют граничные условия в вариационной задаче со свободными концами для функционала $I=\int\limits_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx$?
20. Постановка задачи с подвижными границами для функционала $I=\int\limits_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx.$ Условия трансверсальности.
21. Смысл условий трансверсальности для функционалов $I=\int\limits_{x_0}^{x_1}f(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,)dx.$
22. Постановка вариационной задачи на условный экстремум.
23. Метод неопределенных множителей Лагранжа.
24. Прямые методы вариационного исчисления. Метод Ритца.
25. Прямые методы вариационного исчисления. Метод Бубнова.

Комплект заданий для выполнения

расчетно-графических работ (РГР)

по дисциплине Основы вариационного исчисления

(наименование дисциплины)

ЗАДАНИЕ 1.

Найти вариацию функционала $I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx.$

№ варианта	$F(x, y, y')$	№ вариан-та	$F(x, y, y')$
1	$16y^2 - y'^2 - -2y \cdot \sin x$	4	$2x^3y' - y'^2(x+1)$
2	$xy + y^2 - 2y^2y'$	5	$xy'^2 - y^2/x$
3	$y^2 + 2xyy'$	6	$y'^2 - y^2 - e^x y$

ЗАДАНИЕ 2.

Найти экстремаль функционала $I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx,$

удовлетворяющую граничным условиям $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1.$

№ варианта	$F(x, y, y')$	x_0	y_0	x_1	y_1
1	2	3	4	5	6
1	$xy' + y'^2$	0	0	2	3
	$16y^2 - y'^2 + 32xy$	0	0	$\pi/8$	0
2	$y'^2 + 4yy' - 4y^2$	$\pi/6$	0	$\pi/3$	1
	$y^2 + y'^2 + 2ye^x$	0	0	1	E
3	$x^2y'^2 + 12y^2$	1	1	2	1
	$16y^2 - y'^2 - 2y \cdot \sin 4x$	0	0	$\pi/8$	0

ЗАДАНИЕ 3.

Найти экстремаль функционала

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F[x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)]dx,$$

удовлетворяющую граничным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1, \quad z(x_0) = z_0, \quad z(x_1) = z_1.$$

№ ва-ри-анта	$F[x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)]$	x_0	y_0	z_0	x_1	y_1	z_1
1	$y'^2 + z'^2 + 2yz$	0	0	0	$\pi/2$	1	-1
2	$y'^2 - z'^2 - z^2$	0	1	1	2	3	3

3	$3x^2y-8x^2z+y'z'$	0	0	0	2	1	3
4	$y'z'+6xy+12x^2z$	0	0	0	1	1	1
5	$y'z'-yz$	0	0	0	$\pi/2$	1	1

Найти семейство экстремалей функционала

$$I=\int_{x_0}^{x_1}F\left[x,y(x),y'(x),z(x),z'(x)\right]dx,$$

№ Варианта	$F[x,y(x),y'(x),z(x),z'(x)]$
1	$y'^2+10yz-z'^2$
2	$y'^2-z'^2+18yz-y\cos 2x$
3	$z'^2-y'^2-2z^2+2yz-2yx^2$
4	$y'^2-10yz+z'^2-2(y+z)\cdot\sin x$
5	$y'^2+z'^2+8yz-2ye^x$

ЗАДАНИЕ 4.
Найти семейство экстремалей функционала

$$I=\int_{x_0}^{x_1}F\left[x,y(x),y'(x),y''(x),\ldots,y^{(n)}(x)\right]dx.$$

№ Варианта	F
1	$y'''^2-4y''^2+60xy+16y+xe^{-x}$
2	$4y^2-2xy+5y'^2+y''^2$
3	$y'''^2+4y''^2+120xy+64y+xe^{-2x}$
4	$y''^2+2y'^2+0{,}5y^2-xyy'+ye^{-x}$
5	$240y-y'''^2$

ЗАДАНИЕ 5.

Найти экстремаль функционала $I=\int_{x_0}^{x_1}F\left[x,y(x),y'(x),\ldots,y^{(n)}(x)\right]dx,$

удовлетворяющую граничным условиям: $y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0',\ldots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},$
$y(x_1)=y_1,\quad y'(x_1)=y_1',\ldots,y^{(n-1)}(x_1)=y_1^{(n-1)}.$

№ вари-анта	F	Граничные условия
1	$y''^2-2y'^2+y^2$	$y(0)=0,\quad y'(0)=0,\quad y(\pi)=0,\quad y'(\pi)=1$

2	$y''^2 + y'^2 - ye^{3x}$	$y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$
3	$y''^2 + 9y'^2 - 2y(\cos x + + \sin x)$	$y(0) = y'(0) = 0, \quad y(2\pi) = y(2\pi) = 1$
4	$y''^2 - 16y'^2 - 2y \cdot \sin x$	$y(0) = y'(0) = 0, \ y(\pi/4) = y'(\pi/4) = 0$
5	$y''^2 - y^2 - 2e^{2x}y$	$y(0) = y'(0) = y(\pi/2) = 0, \quad y'(\pi/2) = 1$

ЗАДАНИЕ 6.

Решить вариационную задачу со свободными концами

для функционала $I = \int_{x_0}^{x_1} F[x, y(x), y'(x)]dx$.

№ варианта	F	Уравнения вертикалей
1	$y'^2 - 4y^2 - 5y \cdot \cos x$	$x = 0, \quad x = \pi/6$
2	$y'^2 - 4y^2 + 2y \cdot \sin 3x$	$x = 0, \quad x = \pi/4$
3	$y'^2 - y^2 + 4y \cdot \cos 2x$	$x = \pi/2, \quad x = \pi$
4	$y'^2 - 16y^2 + 2y \cdot e^{-x}$	$x = 0, \quad x = \pi/8$
5	$4y^2 - y'^2 + 8xy$	$x = \pi/6, \quad x = \pi/3$

Решить вариационную задачу со свободным концом для функционала

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F[x, y(x), y'(x)]dx.$$

№ варианта	F	Граничное условие	Уравнение вертикали
6	$y'^2 - 4yy' + 8yx^2 - 4y^2$	$y(0) = 0$	$x = \pi$
7	$y'^2 - e^{2x}y' - 4y^2$	$y(0) = 1$	$x = \pi$
8	$y'^2 - 4x^4y' - 8xy$	$y(0) = 0$	$x = 1$
9	$y^2 - y'^2 - 2y \cdot \cos x$	$y(0) = 1$	$x = \pi/4$
10	$y^2 - y'^2 + 4y \cdot \sin 2x$	$y(0) = 1$	$x = \pi$

ЗАДАНИЕ 7.

Решить вариационную задачу с подвижными границами:

1). Найти кратчайшее расстояние между параболой и прямой:

№ варианта	Уравнение параболы	Уравнение прямой
1	$y = x^2 + 1$	$y = 2x - 4$

2	$y = x^2 - 1$	$y = -x - 4$
3	$y = -x^2$	$y = 3 - x$
4	$y = 2 - x^2$	$y = x + 6$
5	$y = x^2 + 2$	$y = x$

2). Найти кратчайшее расстояние между окружностью и прямой:

№ варианта	Уравнение окружности	Уравнение прямой
6	$x^2 + y^2 = 4$	$y = x + 4$
7	$(x+1)^2 + y^2 = 1$	$y = 2 - x$
8	$x^2 + y^2 = 1$	$y = 4 - x$
9	$x^2 + y^2 = 4$	$y = 2x + 8$

3). Найти кратчайшее расстояние от точки A до заданной линии

№ варианта	Координаты точки $A(x, y)$	Уравнение линии
17	(-1, 3)	$y = 1 - 3x$
18	(-1, 5)	$y^2 = x$
19	(1, 0)	$4x^2 + 9y^2 = 36$
20	(2, 3)	$y = 2x + 1$
21	(-1, 2)	$(x-2)^2 + y^2 = 4$

ЗАДАНИЕ 8.

Решить вариационную задачу на условный экстремум:

Найти экстремаль функционала $I = \int_{x_0}^{x_1} F[x, y(x), y'(x)]dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ и интегральной связи $K = \int_{x_0}^{x_1} G[x, y(x), y'(x)]dx$

№ вариан-та	F	x_0	x_1	y_0	y_1	G	K
1	y'^2	0	π	0	0	y^2	1
2	y'^2	0	π	0	1	$y \cdot \sin x$	0
3	y'^2	0	$\pi/2$	0	$\pi/2$	$y \cdot \sin 2x$	π
4	$y \cdot \sin x$	0	π	0	π	y'^2	$3\pi/2$
5	y'^2	0	1	0	5	xy	1

ЗАДАНИЕ 9.

Решить методом Бубнова задачу об изгибе балки, используя полное вариационное уравнение изгиба балки:

$$\int_0^l (EIy^{IV} - q)\delta y dx + M\delta y' \Big|_0^l - Q\delta y \Big|_0^l = 0,$$

где $y(x)$, $M(x)$, $Q(x)-$ соответственно прогиб, изгибающий момент и поперечная сила в произвольном поперечном сечении балки с абсциссой x; $EI-$изгибная жесткость балки, $q(x)-$ поперечная распределенная нагрузка, равная

$$q(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & при \quad 0 \le x < l/4, \\ \varphi_2(x) & при \quad l/4 \le x < l/2, \\ \varphi_3(x) & при \quad l/2 \le x \le l. \end{cases}$$

Выражения для функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ указаны в таблице:

№ варианта	Граничные Условия	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$
1	$y(0) = y''(0) = 0$, $y(l) = y''(l) = 0$	q_0	$2q_0$	$q_0(1-x/l)$
2		0	$q_0 x/l$	q_0
3		$q_0 x/l$	q_0	0
4		q_0	$q_0(1-x/l)$	0
5		0	$q_0(1-x/l)$	$2q_0$

ЗАДАНИЕ 10.

Решить методом Ритца в двучленном приближении задачу об изгибе балки, используя выражение для полной потенциальной энергии балки при изгибе:

$$Э = \int_0^l \left(\frac{EI}{2} y''^2 - qy \right) dx,$$

где EI - изгибная жесткость балки, $y(x)$ - прогиб в произвольном поперечном сечении балки с абсциссой x, $q(x)$ - поперечная распределенная нагрузка, определяемая в соответствии с таблицей из задания 9.

Критерии оценки:

- оценка «зачтено» выставляется студенту, если он регулярно в течение семестра представлял решения задач, выполнил полностью все задания и их защитил, ответив на вопросы преподавателя;
- оценка «не зачтено» выставляется студенту, если он нерегулярно в течение семестра представлял решения задач, выполнил задания не полностью или вообще не представлял работы на проверку, допускает существенные неточности в ответах на вопросы преподавателя.