Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Максимов Алексей Борисович
Должность: директор департамента по образовательной политике
Дата подписания: 18.10.2023 12:18:20
Уникальный программный ключ:
8db180d1a3f02ac9e60521a5672742735c18b1d6

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В.И. Щербаков

М.Н. Лукьянов

# КУРСОВОЙ ПРОЕКТ «КОЛЕБАНИЯ КОЛЕСНОЙ МАШИНЫ»

Методические указания по подготовке курсового проекта для студентов, обучающихся по специальности 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства»

Москва 2021

Работа подготовлена на кафедре «Динамика, прочность машин и сопротивление материалов»

В.И. Щербаков, М.Н. Лукьянов Методические указания к подготовке курсового проекта для студентов, обучающихся по специальности 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства» – М.: Московский политех – 2020.

Методическое указание содержит материал по подготовке курсового проекта.

© В.И. Щербаков
М.Н. Лукьянов
© Московский политех, 2021

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие содержит задание к расчетно-графической работе по разделам «Колебания и статистическая динамика механических систем с конечным числом степеней свободы» курсов «Статическая механика и теория надежности» и «Статистическая механика и теория колебаний». Даны методические указания по выполнению задания и подробные примеры расчетов.

Выполняемая работа знакомит студентов с методами составления уравнений движения колесных машин, определения спектра собственных частот и собственных форм колебаний. Рассмотрен расчет вынужденных колебаний машины, вызванных действием случайных кинематических воздействий на колеса от неровностей дороги. Даны методы расчета передаточных функций и амплитудно-частотных характеристик системы, а также оценки статистических характеристик выходных процессов, в частности, дисперсии и среднеквадратического значения ускорений на месте водителя и надежности работы упругих элементов подвески. Трудоемкие расчеты рекомендуется проводить с использованием программного комплекса MathCAD.

Выполненная работа оформляется в виде расчетно-пояснительной записки на бумаге формата А4 в соответствии с ГОСТ 2.105 ЕСКД «Общие требования к текстовым документам».

Пояснительная записка состоит из жестко сброшюрованных: титульного листа, содержания, расчетно-текстовой части с рисунками, заключения и списка использованной литературы.

# 1. ЗАДАНИЕ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ

## 1.1. Выбор исходных данных

Вначале следует выбрать расчетную схему транспортного средства и исходные числовые данные: нечетным номерам вариантов соответствуют схема рис. 1.1 и табл. 1.1, а четным – схема рис. 1.2 и табл. 1.2.

Для заданного транспортного средства требуется:

1) составить дифференциальные уравнения малых вертикальных и угловых колебаний в продольно-вертикальной плоскости, являющейся плоскостью симметрии машины;

2) найти условие, при котором:

– для схемы по рис. 1.1 вертикальные и угловые колебания корпуса многоосной машины становятся независимыми;

– для схемы по рис. 1.2 вертикальные колебания передней и задней подвесок становятся независимыми;

Таблица 1.1

| *вариант* | *M, кг* | $\rho$, *м* | $l_1$, *м* | $l_2$, *м* | $l_3$, *м* | $l_4$, *м* | $l_k$, *м* | $c_1=c_4$, *кН/м* | $c_2=c_3$, *кН/м* | $b_1=b_4$, *кН·с/м* | $b_2=b_3$, *кН·с/м* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6300 | 0,8 | 2,2 | 0,6 | 1,0 | 2,6 | 2,1 | 90 | 70 | 90 | 10 |
| 3 | 8000 | 0,9 | 2,5 | 0,8 | 0,9 | 2,6 | 2,3 | 100 | 90 | 95 | 20 |
| 5 | 9000 | 0,9 | 2,4 | 0,7 | 1,0 | 2,7 | 2,3 | 100 | 90 | 100 | 30 |
| 7 | 10000 | 1,1 | 2,4 | 0,6 | 1,2 | 3,0 | 2,2 | 110 | 95 | 100 | 40 |
| 9 | 11000 | 1,1 | 2,5 | 0,7 | 1,1 | 2,9 | 2,3 | 110 | 95 | 110 | 50 |
| 11 | 12000 | 1,2 | 2,6 | 0,7 | 1,2 | 3,1 | 2,4 | 120 | 100 | 110 | 60 |
| 13 | 13000 | 1,2 | 2,7 | 0,8 | 1,9 | 3,0 | 2,5 | 120 | 110 | 115 | 70 |
| 15 | 15000 | 1,2 | 2,8 | 0,8 | 1,2 | 3,2 | 2,5 | 140 | 130 | 115 | 70 |
| 17 | 16000 | 1,3 | 2,9 | 0,8 | 1,3 | 3,4 | 2,6 | 150 | 140 | 120 | 80 |
| 19 | 17000 | 1,3 | 3,0 | 0,9 | 1,2 | 3,3 | 2,7 | 160 | 150 | 120 | 80 |

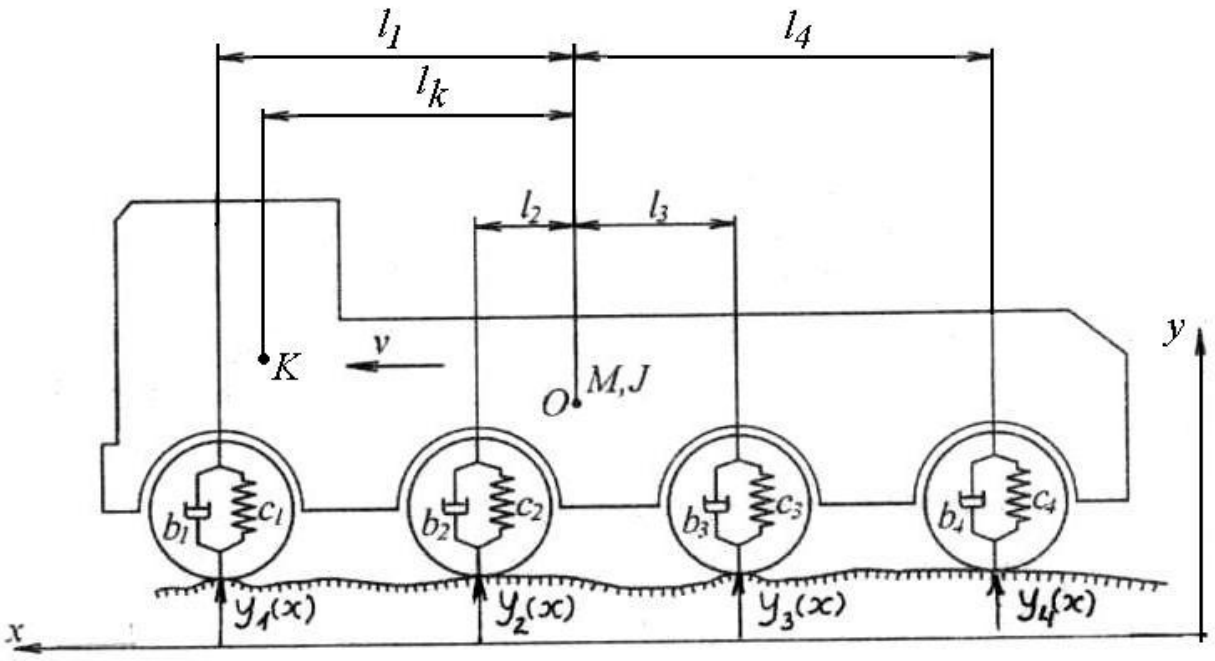



Рис. 1.1

3) принимая справедливым условие независимости колебаний (см. п. 2), построить одномассовую или двухмассовую эквивалентную схему системы подрессоривания машины и соответствующую ей математическую модель, на основе которой провести расчеты по нижеследующим пунктам;

4) определить циклические ($c^{-1}$) и технические ($Гц$) частоты и формы собственных колебаний системы;

5) вычислить передаточные функции от внешнего воздействия (микропрофиля дороги) к перемещениям, скоростям и ускорениям точек подрессоренной массы;

6) сформировать матрицу спектральных плотностей внешних кинематических воздействий на колеса машины;

7) рассчитать матрицу спектральных плотностей для выходных процессов;

8) найти дисперсию и среднеквадратическое отклонение значений вертикальных ускорений в точке $K$ (сиденье водителя);

9) определить вероятность события, что за 1000 часов работы динамическая осадка упругого элемента подвески передней оси машины ни разу не превысит $\delta_{ст}$ (статическое значение осадки).

В пунктах 7, 8 и 9 провести числовые расчеты с иллюстрацией графиками для трех скоростей движения транспортного средства $v_1$=2,8 м/с (10 км/ч), $v_2$=8,3 м/с (30 км/ч) и $v_3$=13,9 м/с (50 км/ч).

Общие данные:

– принять момент инерции подрессоренной массы $J = M \cdot \rho^2$, где $\rho$ – радиус инерции;

– микропрофиль дороги представляет собой стационарную случайную функцию y(x) со спектральной плотностью $S_y(\theta) = \frac{D_y \cdot d_0}{\pi\left(d_0^2 + \theta^2\right)}$, где $D_y$=2·10$^{-4}$ м$^2$; $d_0$=0,133 м$^{-1}$; $\left(-\infty \le \theta \le +\infty\right)$.

Таблица 1.2

| Вариант | $M_a$, кг | $m_1$, кг | $m_2$, кг | $\rho$, м | $c_1$, кН/м | $c_2$, кН/м | $c_{ш1}$, кН/м | $c_{ш2}$, кН/м | $b_1$, кН·с/м | $b_2$, кН·с/м | $l_1$, м | $l_2$, м | $l_k$, м |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1500 | 90 | 75 | 1,06 | 32 | 40 | 275 | 300 | 2,6 | 3,5 | 1,0 | 1,2 | 0,5 |
| 4 | 1900 | 95 | 80 | 1,30 | 40 | 50 | 300 | 330 | 2,9 | 5,8 | 1,2 | 1,5 | 0,6 |
| 6 | 2000 | 110 | 250 | 1,35 | 35 | 150 | 400 | 1000 | 3,6 | 4,2 | 1,5 | 1,3 | 0,7 |
| 8 | 1500 | 200 | 450 | 1,42 | 83 | 150 | 515 | 1080 | 6,4 | 7,0 | 1,6 | 1,4 | 0,8 |
| 10 | 3000 | 200 | 460 | 1,68 | 90 | 180 | 800 | 1700 | 5,0 | 8,0 | 1,8 | 1,5 | 0,8 |
| 12 | 4000 | 200 | 500 | 1,86 | 100 | 180 | 900 | 2000 | 6,8 | 9,0 | 2,0 | 1,6 | 1,0 |
| 14 | 6000 | 210 | 510 | 2,10 | 110 | 240 | 1000 | 2100 | 9,1 | 9,5 | 2,5 | 1,5 | 1,0 |
| 16 | 8000 | 220 | 550 | 1,80 | 120 | 300 | 1250 | 2500 | 9,5 | 9,5 | 3,0 | 1,0 | 1,5 |
| 18 | 8500 | 225 | 550 | 1,90 | 125 | 310 | 1300 | 1300 | 9,7 | 9,7 | 3,1 | 1,1 | 1,5 |
| 20 | 9000 | 230 | 550 | 2,00 | 130 | 310 | 1300 | 1300 | 9,8 | 9,8 | 3,2 | 1,2 | 1,5 |

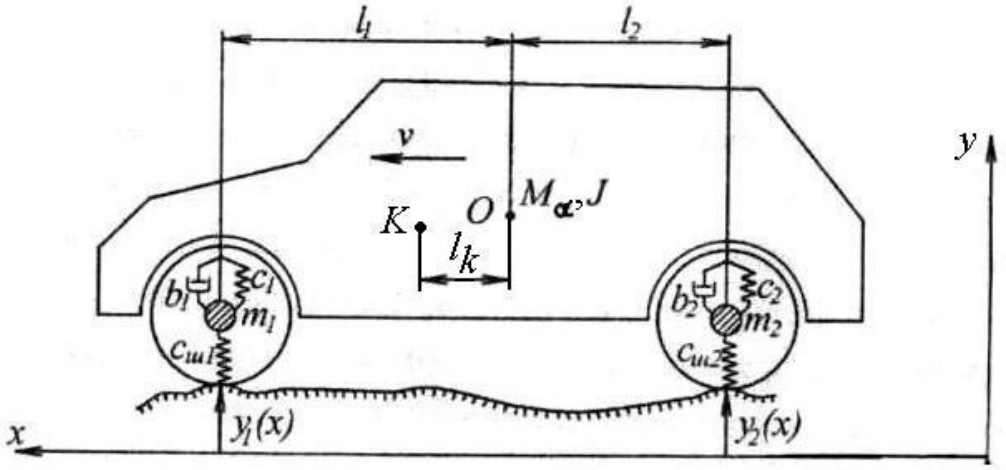



Рис. 1.2

## 1.2 Общие пояснения

Заданные транспортные колесные машины (см. рис. 1.1 и 1.2) движутся прямолинейно по длине пути $x$ с постоянной скоростью $v$ и совершают вертикальные линейные и угловые колебания в продольной плоскости симметрии машин, т.е. рассматриваются плоскостные модели. Колебания в продольной плоскости возникают от микронеровностей дороги $y(x)$ при предположении об одинаковом профиле дороги под левым и правым бортами (колесами) машины. Считается, что две главные центральные оси инерции, лежащие в плоскости симметрии машин, совпадают с вертикалью и горизонталью. Также предполагается, что характеристики подвески, амортизаторов и шин – линейные, а колеса сохраняют непрерывный контакт с дорогой.

Пояснения к рис. 1.1. Дано:

$O$ – центр подрессоренной массы;

$M$, $J$ – подрессоренная масса и момент инерции подрессоренной массы относительно главной центральной оси (точки $O$), перпендикулярной плоскости схемы;

$c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$ – жесткости подвесок;

$b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$ – коэффициенты вязкого сопротивления подвесок (под $c_i$ и $b_i$ понимаются приведенные значения для $i$-ой пары (оси) опорных колес);

$l_1$, $l_2$, $l_3$, $l_4$ – линейные размеры (координаты опорных колес относительно центра масс);

$l_k$ – координата сиденья водителя;

$y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, $y_4(x)$ – высоты неровностей под опорными колесами в зависимости от длины пути $x$.

Неподрессоренными массами (пружин, катков, амортизаторов) пренебрегается.

Пояснения к рис. 1.2. Дано:

$O$ – центр подрессоренной массы;

$M_\alpha$, $J$ – подрессоренная масса и момент инерции подрессоренной массы относительно главной центральной оси (точки $O$), перпендикулярной плоскости схемы;

$m_1$, $m_2$ – неподрессоренные массы;

$c_ш$, $c$, $b$ – жесткости шин, подвесок и коэффициенты вязкого трения в амортизаторах (под $c_ш$, $c$ и $b$ понимаются суммарные значения для пары (оси) опорных колес), а дополнительные индексы «1» и «2» указывают на принадлежность соответственно передним и задним колесам и подвескам;

$l_1$, $l_2$ – координаты центра масс автомобиля;

$l_k$ – координата сиденья водителя;

$y_1(x)$, $y_2(x)$ – высоты неровностей под передними и задними колесами в зависимости от длины пути $x$.

## 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЯ С ПРИМЕРАМИ РАСЧЕТОВ

### 2.1. Общие указания

Перед выполнением работы изучите по учебному пособию [2] главы 1, 2, учебному пособию [3] главы 1, 2 и 5. Разберите решения задач в источнике [5] (стр. 126-150, задачи 2.7-2.14).

### 2.2. Указания и пример решения задачи для четырехосного транспортного средства

Условие задачи примера.

Расчетная схема транспортного средства показана на рис. 2.1. Числовые данные:

$M=5000$ *кг*; $\rho=0{,}8$ *м*; $l_1=2{,}3$ *м*; $l_2=0{,}7$ *м*; $l_3=0{,}9$ *м*; $l_4=2{,}5$ *м*; $l_к=2{,}2$ *м*; $c_1=c_2=c_3=c_4=100$ *кН/м*; $b_1=b_2=b_3=b_4=b=100$ *кН·с/м*; $J = M\rho^2 = 5000 \cdot 0{,}8^2 = 3200$ *кг·м*$^2$. Спектральная плотность микропрофиля дороги $S_y(\theta) = \dfrac{D_y \cdot d_0}{\pi\left(d_0^2 + \theta^2\right)}$, где $D_y=2\cdot10^{-4}$ *м*$^2$; $d_0=0{,}133$ *м*$^{-1}$; $\left(-\infty \le \theta \le +\infty\right)$.

Для заданного транспортного средства требуется:

1) составить дифференциальные уравнения малых вертикальных и угловых колебаний в продольно-вертикальной плоскости, являющейся плоскостью симметрии машины;

2) найти условие, при котором вертикальные и угловые колебания корпуса многоосной машины становятся независимыми;

3) принимая справедливым условие независимости вертикальных и угловых колебаний (см. п. 2), построить одномассовые эквивалентные динамические схемы системы подрессоривания машины и соответствующие им математические модели, на основе которых провести расчеты по нижеследующим пунктам;

4) определить циклические ($с^{-1}$) и технические (*Гц*) частоты и формы собственных колебаний системы;

5) вычислить передаточные функции от внешнего воздействия (микропрофиля дороги) к перемещениям, скоростям и ускорениям точек подрессоренной массы;

6) сформировать матрицу спектральных плотностей внешних кинематических воздействий на колеса машины;

7) рассчитать матрицу спектральных плотностей для выходных процессов;

8) найти дисперсию и среднеквадратическое отклонение значений вертикальных ускорений в точке *K* (сиденье водителя);

9) определить вероятность события, что за 1000 часов работы динамическая осадка упругого элемента подвески передней оси машины ни разу не превысит $\delta_{ст}$ (статическое значение осадки).

В пунктах 7, 8 и 9 провести числовые расчеты с иллюстрацией графиками для трех скоростей движения транспортного средства $v_1$=2,8 *м/с (10 км/ч),* $v_2$=8,3 *м/с (30 км/ч)* и $v_3$=13,9 *м/с (50 км/ч).*

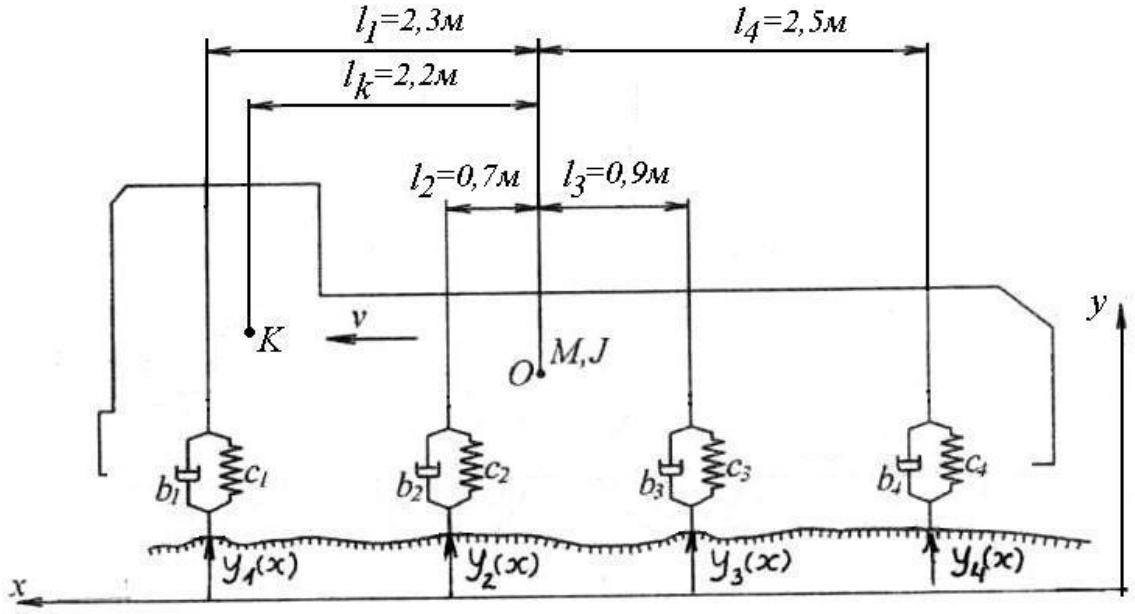



Рис. 2.1

**Решение**

*1. Составим дифференциальные уравнения малых вынужденных колебаний машины.*

Колебательная система имеет две степени свободы. Введем обобщенные координаты $q_1$, $q_2$ (рис. 2.2, а), которым дадим малые перемещения и изобразим систему схематично в возбужденном состоянии с картиной действующих сил и моментов (рис. 2.2, б). С учетом зависимости $x=vt$ законы $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ и $y_4(x)$ пересчитываются во временную область $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ и $f_4(t)$. Выразим вертикальные перемещения $h_i(i=1,\ldots,4)$ точек крепления подвесок через обобщенные координаты:

$$h_1 = q_1 + q_2 \cdot l_1;$$
$$h_2 = q_1 + q_2 \cdot l_2;$$
$$h_3 = q_1 - q_2 \cdot l_3;$$
$$h_4 = q_1 - q_2 \cdot l_4.$$

Тогда деформации $\delta_i$ упругих элементов равны:

$$\delta_1 = h_1 - f_1;\ \delta_2 = h_2 - f_2;\ \delta_3 = h_3 - f_3;\ \delta_4 = h_4 - f_4.$$

Силы в упругих элементах выразятся в виде:

$$F_{пр1} = c_1 \cdot (h_1 - f_1);$$
$$F_{пр2} = c_2 \cdot (h_2 - f_2);$$
$$F_{пр3} = c_3 \cdot (h_3 - f_3);$$
$$F_{пр4} = c_4 \cdot (h_4 - f_4),$$

а силы вязкого сопротивления в виде:

$$F_{c1} = b_1 \cdot (\dot{h}_1 - \dot{f}_1);$$
$$F_{c2} = b_2 \cdot (\dot{h}_2 - \dot{f}_2);$$
$$F_{c3} = b_3 \cdot (\dot{h}_3 - \dot{f}_3);$$
$$F_{c4} = b_4 \cdot (\dot{h}_4 - \dot{f}_4),$$

где точки наверху символов обозначают производные по времени.

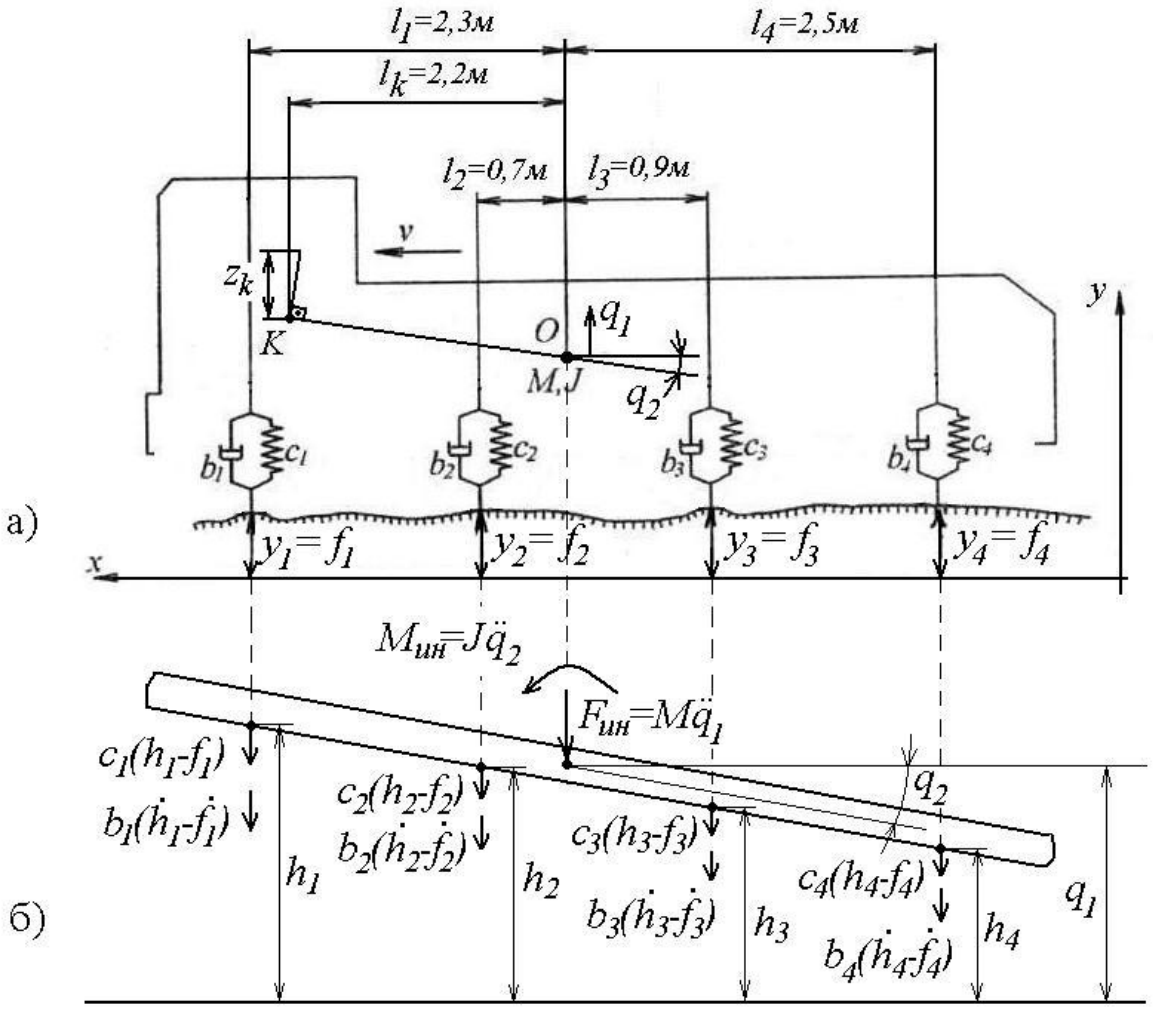



Рис. 2.2

Приняв во внимание картину сил, показанную на рис. 2.2, б, запишем уравнение динамического равновесия системы в виде равенства нулю суммы проекций всех сил на вертикальную ось и суммы моментов относительно центра масс *O*:

$$\begin{aligned} &\sum y = 0: \quad M \cdot \ddot{q}_1 + b_{\Sigma 1}\dot{q}_1 + b_{\Sigma 2}\dot{q}_2 + c_{\Sigma 1}q_1 + c_{\Sigma 2}q_2 = P_1; \\ &\sum M_0 = 0: \quad J \cdot \ddot{q}_2 + b_{\Sigma 2}\dot{q}_1 + b_{\Sigma 3}\dot{q}_2 + c_{\Sigma 2}q_1 + c_{\Sigma 3}q_2 = P_2, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$\begin{aligned} &c_{\Sigma 1} = \sum_{i=1}^{n} c_i; \quad c_{\Sigma 2} = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot l_i; \quad c_{\Sigma 3} = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot l_i^2; \quad P_1 = \sum_{i=1}^{n} (b_i \cdot \dot{f}_i + c_i \cdot f_i); \\ &b_{\Sigma 1} = \sum_{i=1}^{n} b_i; \quad b_{\Sigma 2} = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot l_i; \quad b_{\Sigma 3} = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot l_i^2; \; P_2 = -\sum_{i=1}^{n} (b_i \cdot l_i \cdot \dot{f}_i + c_i \cdot l_i \cdot f_i), \end{aligned} \tag{2.2}$$

здесь $c_i$, $b_i$ – суммарные жесткость и коэффициент сопротивления подвески опорных колес $i$-ой пары (оси);

$f_i$ – высота неровности под опорными колесами $i$-ой пары (оси);

$n$ – число пар (осей) опорных колес машины, в нашем случае $n$=4.

Подставив числовые значения, получим:

$b_{\Sigma 1}=4b=4\cdot 100=400$ *кН·с·м*$^{-1}$;

$b_{\Sigma 2}=b(2,3+0,7-0,9-2,5)=-100\cdot 0,4=-40$ *кН·с;*

$b_{\Sigma 3}=b(2,3^2+0,7^2-0,9^2-2,5^2)=100\cdot 12,84=1284$ *кН·с·м;*

$c_{\Sigma 1}=4c=4\cdot 100=400$ *кН·м*$^{-1}$;

$c_{\Sigma 2}=c(2,3+0,7-0,9-2,5)=-100\cdot 0,4=-40$ *кН;*

$c_{\Sigma 3}=c(2,3^2+0,7^2-0,9^2-2,5^2)=100\cdot 12,84=1284$ *кН·м*.

*2. Найдем выражение, при котором вертикальные и угловые колебания корпуса машины становятся независимыми*.

В выражения (2.2) координаты $l_i$ подставляются со своими знаками («плюс» для опорных колес, расположенных впереди центра масс машины; «минус» - для опорных колес, расположенных за центром масс). Поэтому коэффициенты $b_{\Sigma 2}$, $c_{\Sigma 2}$, связывающие уравнения в системе (2.1), имеют небольшие значения. В случае $b_{\Sigma 2}=0$, $c_{\Sigma 2}=0$ уравнения (2.1) становятся независимыми. Первое из них будет описывать вертикальные линейные (координата $q_1$), а второе – продольные угловые (координата $q_2$) колебания:

$$M\ddot{q}_1 + b_{\Sigma 1}\dot{q}_1 + c_{\Sigma 1}q_1 = P_1\ ; \qquad (2.3)$$

$$J\ddot{q}_2 + b_{\Sigma 3}\dot{q}_2 + c_{\Sigma 3}q_2 = P_2\ . \qquad (2.4)$$

*3. Одномассовые эквивалентные динамические схемы системы подрессоривания машины и их математические модели.*

В случае справедливости условия независимости вертикальных и угловых колебаний (см. п.2) динамическая схема машины (см. рис. 2.2, а) распадается на две одномассовые эквивалентные динамические схемы, показанные на рис. 2.3

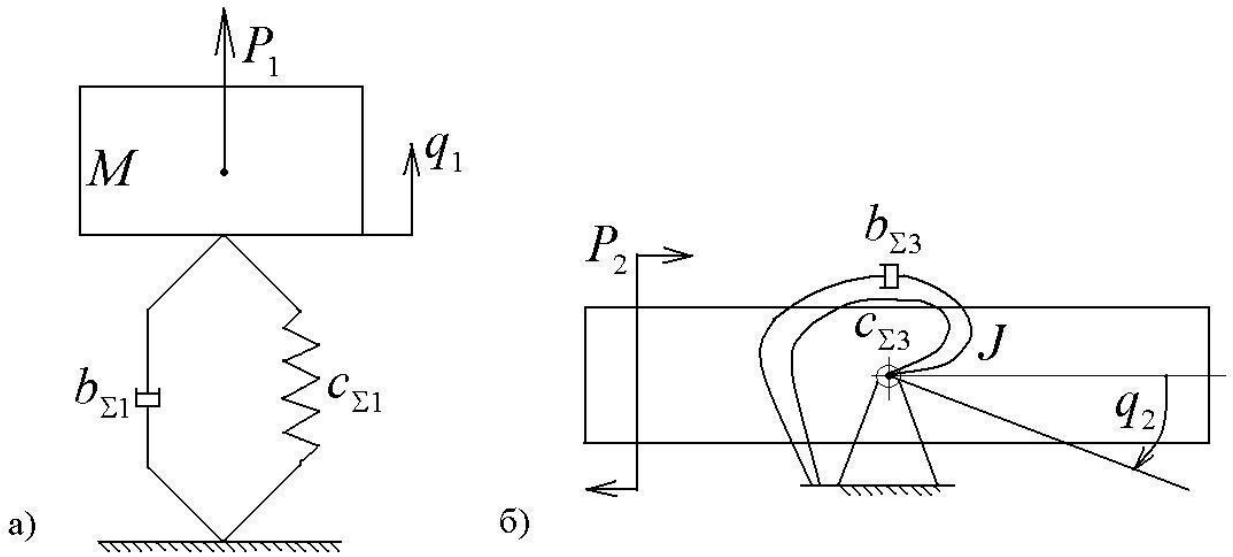



Рис. 2.3

Схема рис. 2.3,а соответствует линейным колебаниям, а – рис.2.3,б – угловым колебаниям машины. Их математические модели – уравнения (2.3) и (2.4).

*4. Частоты и формы собственных колебаний.*

Уравнения (2.3), (2.4) разделим соответственно на *M*, *J* и запишем в стандартном виде:

$$\ddot{q}_1 + 2 \cdot n_1 \cdot \dot{q}_1 + \omega_1^{\,2} \cdot q_1 = \frac{P_1}{M}; \qquad (2.5)$$

$$\ddot{q}_2 + 2 \cdot n_2 \cdot \dot{q}_2 + \omega_2^{\,2} \cdot q_2 = \frac{P_2}{J}, \qquad (2.6)$$

где $n_1 = \frac{b_{\Sigma1}}{2M} = \frac{400 \cdot 10^3}{2 \cdot 5000} = 40\,c^{-1}$, $n_2 = \frac{b_{\Sigma3}}{2J} = \frac{1284 \cdot 10^3}{2 \cdot 3200} = 200{,}6\,c^{-1}$ – коэффициенты затухания;

$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_{\Sigma1}}{M}} = \sqrt{\frac{400 \cdot 10^3}{5000}} = 8{,}94\,c^{-1}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{c_{\Sigma3}}{J}} = \sqrt{\frac{1284 \cdot 10^3}{3200}} = 20{,}0\,c^{-1}$ – циклические частоты (число колебаний за 2π секунд).

Технические собственные частоты (число колебаний за секунду):

$$\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{8{,}94}{2\pi} = 1{,}42 \quad \text{Гц};$$

$$\nu_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{20{,}0}{2\pi} = 3{,}18 \text{ Гц.}$$

Собственные формы вертикальных и угловых колебаний представляют собой гармонические колебания вида

$$q = V \cdot \sin(\omega \cdot t + \beta),$$

где $V$ – амплитуда;

$\omega$ – собственная частота;

$\beta$ – фазовый угол.

*5. Расчет передаточных функций от внешнего воздействия (микропрофиля дороги) к перемещениям, скоростям и ускорениям точек подрессоренной массы.*

Изображение уравнений (2.5) и (2.6) в частотной области (преобразованные по Фурье):

$$\begin{aligned}&\left[(i\omega)^2 + 2n_1(i\omega) + \omega_1^2\right] \cdot Q_1(i\omega) = \\ &= M^{-1}\{i\omega\left[b_1F_1(i\omega) + b_2F_2(i\omega) + b_3F_3(i\omega) + b_4F_4(i\omega)\right] + c_1F_1(i\omega) + c_2F_2(i\omega) + c_3F_3(i\omega) + c_4F_4(i\omega)\};\end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}&\left[(i\omega)^2 + 2n_2(i\omega) + \omega_2^2\right] \cdot Q_2(i\omega) = \\ &= -J^{-1}\{i\omega\left[b_1l_1F_1(i\omega) + b_2l_2F_2(i\omega) + b_3l_3F_3(i\omega) + b_4l_4F_4(i\omega)\right] + c_1l_1F_1(i\omega) + c_2l_2F_2(i\omega) + c_3l_3F_3(i\omega) + c_4l_4F_4(i\omega)\},\end{aligned} \quad (2.8)$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица;

$\omega$ – частота;

$Q_1(i\omega)$, $Q_2(i\omega)$ – комплексные амплитудные спектры (трансформанты Фурье) процессов $q_1(t)$ и $q_2(t)$ соответственно;

$F_1(i\omega)$, $F_2(i\omega)$, $F_3(i\omega)$, $F_4(i\omega)$ – комплексные амплитудные спектры воздействий $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$ соответственно.

Из (2.7) и (2.8) с учетом $c_1=c_2=c_3=c_4=c$, $b_1=b_2=b_3=b_4=b$ и подстановки числовых значений $l_i$ $(i=1,\ldots,4)$ получим следующие передаточные функции от внешнего воздействия (микропрофиля дороги) к перемещениям:

$$H_{q_1}(i\omega) = \frac{(c + i \cdot \omega \cdot b)}{M \cdot [(\omega_1^2 - \omega^2) + i2n_1\omega]} \cdot (1;1;1;1) ; \quad (2.9)$$

$$H_{q2}(i\omega) = \frac{(c + i \cdot \omega \cdot b)}{J \cdot [(\omega_2^2 - \omega^2) + i2n_2\omega]} \cdot (2{,}3;0{,}7;\text{-}0{,}9;\text{-}2{,}5) , \quad (2.10)$$

где $H_{q1}(i\omega)$ – матрица-строка передаточных функций для амплитуд $Q_1(i\omega)$;

$H_{q2}(i\omega)$ – матрица-строка передаточных функций для амплитуд $Q_2(i\omega)$.

Передаточные функции для скоростей процессов:

$$H_{\dot{q}_1}(i\omega) = \omega^2 \cdot H_{q_1}(i\omega); \quad (2.11)$$

$$H_{\dot{q}_2}(i\omega) = \omega^2 \cdot H_{q_2}(i\omega). \quad (2.12)$$

Передаточные функции для ускорений процессов:

$$H_{\ddot{q}_1}(i\omega) = \omega^4 \cdot H_{q_1}(i\omega); \quad (2.13)$$

$$H_{\ddot{q}_2}(i\omega) = \omega^4 \cdot H_{q_2}(i\omega). \quad (2.14)$$

*6. Формирование матрицы спектральных плотностей внешних воздействий.*

При переходе от профиля дороги *y(x)* к кинематическим воздействиям *f(t)* на колеса транспортной машины необходимо учитывать скорость движения *v* и сглаживающую способность шин колес.

Спектральная плотность сглаженного профиля дороги $S_{\tilde{y}}(\omega)$ определяется по спектральной плотности исходного профиля $S_y(\theta)$ по формуле ([2], с. 69-76)

$$S_{\tilde{y}}(\theta) = \frac{S_y(\theta)}{a^2\theta^2 + 1},$$

где $\theta$ – частота по пути *x*;

*a* – длина отпечатка шины на дороге, может быть оценена по следующей зависимости [6]:

$$a = \sqrt{(0{,}12 \div 0{,}16)B \cdot d + (0{,}14 \div 0{,}22)B^2},$$

где *B, d* – ширина и посадочный диаметр шины.

Поскольку в задании не заданы размеры шин колес, то примем ориентировочно *a=0,1 м*.

Учет скорости движения *v* на спектральную плотность воздействия в контакте колеса с дорогой производится по формуле [2] с заменой $\theta$ на $\omega/\upsilon$:

$$S_f(\omega)=\frac{1}{\upsilon}S_y\left(\frac{\omega}{\upsilon}\right),$$

где $\omega$ – частота воздействий по времени *t*.

Таким образом, спектральная плотность микропрофиля дороги с учетом сглаживания шины и скорости движения имеет вид:

$$S_f(\omega)=\frac{1}{\upsilon}\cdot\frac{S_y\left(\frac{\omega}{\upsilon}\right)}{a^2\left(\frac{\omega}{\upsilon}\right)^2+1}=\frac{D_y\cdot\alpha}{\pi(d^2+\omega^2)(\beta^2\omega^2+1)}, \qquad (2.15)$$

где $D_y=2\cdot10^{-4}$ м; $\alpha=\alpha_0\cdot\upsilon=0{,}133\upsilon$; $\beta=\alpha\cdot\upsilon^{-1}=0{,}1\upsilon^{-1}$; $(-\infty\le\omega\le\infty)$.

Тогда матрицу спектральных плотностей кинематических воздействий для четырехосного транспортного средства можно представить в виде

$$S_{\bar{f}}(\omega)=\begin{bmatrix} S_{f_1}(\omega) & S_{f_1f_2}(\omega) & S_{f_1f_3}(\omega) & S_{f_1f_4}(\omega)\\ S_{f_2f_1}(\omega) & S_{f_2}(\omega) & S_{f_2f_3}(\omega) & S_{f_2f_4}(\omega)\\ S_{f_3f_1}(\omega) & S_{f_3f_2}(\omega) & S_{f_3}(\omega) & S_{f_3f_4}(\omega)\\ S_{f_4f_1}(\omega) & S_{f_4f_2}(\omega) & S_{f_4f_3}(\omega) & S_{f_4}(\omega) \end{bmatrix}, \qquad (2.16)$$

где $S_{f_1}(\omega)=S_{f_2}(\omega)=S_{f_3}(\omega)=S_{f_4}(\omega)=S_f(\omega)$;

$$S_{f_1f_2}(\omega)=S^*_{f_2f_1}(\omega)=S_{f_2f_3}(\omega)=S^*_{f_3f_2}(\omega)=S_{f_3f_4}(\omega)=S^*_{f_4f_3}(\omega)=e^{i\omega\frac{l}{\upsilon}}\cdot S_f(\omega);$$

$$S_{f_1f_3}(\omega)=S^*_{f_3f_1}(\omega)=S_{f_2f_4}(\omega)=S^*_{f_4f_2}(\omega)=e^{i\omega\frac{2l}{\upsilon}}\cdot S_f(\omega);$$

$$S_{f_1f_4}(\omega)=S^*_{f_4f_1}(\omega)=e^{i\omega\frac{3l}{\upsilon}}\cdot S_f(\omega);$$

*– символ комплексо-сопряженной величины;

*l* – расстояние между осями, для рассматриваемого примера *l=1,6м*.

*7. Расчет матрицы спектральных плотностей выходных процессов.*

На выходе системы имеем два случайных процесса $q_1(t)$ и $q_2(t)$, первый из которых определяет закон вертикальных колебаний, а второй – угловых колебаний. Эти процессы описываются следующей матрицей спектральных плотностей:

$$S_{\bar{q}}(\omega)=\begin{bmatrix} S_{q_1}(\omega) & S_{q_1q_2}(\omega) \\ S_{q_1q_2}(\omega) & S_{q_2}(\omega) \end{bmatrix}, \qquad (2.17)$$

где $S_{q_1q_2}(\omega)=S^{*}_{q_1q_2}(\omega)$.

Элементы матрицы $S_{\bar{q}}(\omega)$ найдем из следующей матричной формулы:

$$S_{\bar{q}}(\omega)=H^{*}_{\bar{q}}(i\omega)\cdot S_{\bar{f}}(\omega)\cdot H^{T}_{\bar{q}}(i\omega), \qquad (2.18)$$

где $H_{\bar{q}}(i\omega)=\begin{pmatrix} H_{q_1}(i\omega) \\ H_{q_2}(i\omega) \end{pmatrix}$ – матрица передаточных функций (см. формулы (2.9), (2.10));

$S_{\bar{f}}(\omega)$ – матрица спектральных плотностей входных воздействий (см. формулу (2.16)).

Подставив (2.9), (2.10) и (2.16) в (2.18), получим:

$$S_{q_1}(\omega)=\frac{(c^2+\omega^2b^2)}{M^2\cdot\left[(\omega_1^2-\omega^2)^2+4n_1^2\omega^2\right]}\times$$

$$\times 2\cdot(2+3\cos\omega\frac{l}{\upsilon}+2\cos\omega\frac{2l}{\upsilon}+\cos\omega\frac{3l}{\upsilon})\cdot S_f(\omega);$$

$$S_{q_1q_2}(\omega)=S^{*}_{q_1q_2}(\omega)=-\frac{(c^2+\omega^2b^2)}{M\cdot J\cdot\left[(\omega_1^2-\omega^2)-i2n_1\omega\right]\cdot\left[(\omega_2^2-\omega^2)-i2n_2\omega\right]}\times$$

$$\times 0{,}2\cdot(2+3\cos\omega\frac{l}{\upsilon}+2\cos\omega\frac{2l}{\upsilon}+\cos\omega\frac{3l}{\upsilon})\cdot S_f(\omega);$$

$$S_{q_2}(\omega)=\frac{(c^2+\omega^2b^2)}{J^2\cdot\left[(\omega_2^2-\omega^2)^2+4n_2^2\omega^2\right]}\times$$

$$\times(12{,}84+6{,}46\cos\omega\frac{l}{\upsilon}-7{,}64\cos\omega\frac{2l}{\upsilon}-11{,}5\cos\omega\frac{3l}{\upsilon})\cdot S_f(\omega).$$

*8. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение значений ускорения в точке К (сиденье водителя).*

Из рис. 2.2,а имеем геометрическую зависимость:

$$z_k=q_1+l_k\cdot tgq_2\approx q_1+l_k\cdot q_2.$$

Передаточная функция воздействий $q_1$, $q_2$ к вертикальному перемещению $z_k$:

$$H_{z_k}(i\omega)=(1;l_k).$$

Тогда спектральная плотность перемещений $z_k(t)$ равна:

$$S_{z_k}(\omega) = H^*_{z_k}(i\omega) \cdot S_{\bar{q}}(\omega) \cdot H^T_{z_k}(i\omega) = (1; l_k) \cdot \begin{pmatrix} S_{q_1}(\omega) & S_{q_1 q_2}(\omega) \\ S_{q_1 q_2}(\omega) & S_{q_2}(\omega) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_k \end{pmatrix} =$$

$$= S_{q_1}(\omega) + 2 l_k \, \mathrm{Re}(S_{q_1 q_2}(\omega)) + l_k^2 S_{q_2}(\omega).$$

Спектральная плотность скорости $\dot{z}_k(t)$:

$$S_{\dot{z}_k}(\omega) = \omega^2 \cdot S_{z_k}(\omega).$$

Спектральная плотность ускорений $\ddot{z}_k(t)$:

$$S_{\ddot{z}_k}(\omega) = \omega^2 \cdot S_{\dot{z}_k}(\omega) = \omega^4 \cdot S_{z_k}(\omega).$$

Дисперсия $D_{\ddot{z}_k}$ и среднеквадратическое отклонение $s_{\ddot{z}_k}$ ускорений $\ddot{z}_k(t)$ на месте водителя:

$$D_{\ddot{z}_k} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\ddot{z}_k}(\omega) d\omega = s^2_{\ddot{z}_k}.$$

Считая, что $\ddot{z}_k$ имеет нормальное распределение, получаем максимально возможное значение случайного ускорения, которое действует на водителя:

$$\max \ddot{z}_k = 3 \cdot s_{\dot{z}_k}. \qquad (2.19)$$

По полученным выражениям с помощью ЭВМ (например, в среде MathCAD) следует построить графики изменения спектральной плотности $S_{\ddot{z}_k}(\omega)$ в зависимости от $\omega$ ($-4\omega_2 \le \omega \le 4\omega_2$, где $\omega_2$=20 $c^{-1}$ – высшая собственная частота системы) для заданных трех скоростей движения $v_1$=2,8 *м/с (10 км/ч),* $v_2$=8,3 *м/с (30 км/ч)* и $v_3$=13,9 *м/с (50 км/ч).* Путем численного интегрирования этих графиков найти дисперсии и среднеквадратические отклонения.

9. *Определение вероятности события, что за 1000 часов работы динамическая осадка упругого элемента подвески передней оси машины ни разу не превысит* $\delta_{ст}$.

Статическую осадку упругого элемента примем равной:

$$\delta_{cm} = \frac{M \cdot g}{4c} = \frac{5000 \cdot 10}{4 \cdot 100 \cdot 10^3} = 0{,}025\ м.$$

Деформация упругого элемента подвески передней оси машины от динамических нагрузок (см. рис. 2.2):

$$\delta_1 = q_1 + q_2 \cdot l_1 - f_1.$$

Передаточная функция:

$$H_{\delta_1}(i\omega) = (1; l_1; -1).$$

Спектральная плотность деформации:

$$S_{\delta_{q1}}(\omega) = H^*_{\delta_1}(i\omega) \cdot S(\omega) \cdot H^T_{\delta_1}(i\omega) =$$

$$= (1; l_k; -1) \cdot \begin{pmatrix} S_{q_1}(\omega) & S_{q_1 q_2}(\omega) & S_{q_1 f_1}(\omega) \\ S_{q_2 q_1}(\omega) & S_{q_2}(\omega) & S_{q_2 f_1}(\omega) \\ S_{f_1 q_1}(\omega) & S_{f_1 q_2}(\omega) & S_f(\omega) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= S_{q_1}(\omega) + 2l_1 \operatorname{Re}(S_{q_2 q_1}(\omega)) - 2\operatorname{Re}(S_{q_1 f_1}(\omega)) + l_1^2 S_{q_2}(\omega) - 2l_1 \operatorname{Re}(S_{f_1 q_2}(\omega)) + S_f(\omega).$$

Спектральная плотность скорости $\dot{\delta}_1(t)$:

$$S_{\dot{\delta}_1}(\omega) = \omega^2 \cdot S_{\delta_1}(\omega).$$

Дисперсия деформаций упругого элемента:

$$D_{\delta_1} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\delta_1}(\omega) \cdot d\omega.$$

Дисперсия скорости деформаций упругого элемента:

$$D_{\dot{\delta}_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \cdot S_{\delta_1}(\omega) \cdot d\omega.$$

Эффективная циклическая частота процесса $\delta_1(t)$:

$$\overline{\omega}_\delta = \sqrt{\frac{D_{\dot{\delta}_1}}{D_{\delta_1}}}.$$

Вероятность выброса значений процесса $\delta_1(t)$ за $\delta_{cm}$ по формуле Райса:

$$p_1 = P\left\{\delta_1(t) \rangle \delta_{cm},\ t = 1000 \cdot 60 \cdot 60 = 36 \cdot 10^5 c\right\} = \frac{36 \cdot 10^5}{2\pi} \cdot \overline{\omega}_{\delta_1} \cdot \exp\left\{-\frac{\delta_{cm}^2}{2D_{\delta_1}}\right\}.$$

Вероятность события, что за 1000 часов работы осадка упругого элемента подвески передней оси машины ни разу не превысит $\delta_{ст}$:

$$p_2 = P\left\{\delta_1(t) < \delta_{ст},\ t = 36 \cdot 10^5\, c\right\} = 1 - p_1. \qquad (2.19)$$

По полученным выражениям с помощью ЭВМ (например, в среде MathCAD) следует провести числовые расчеты вероятности $p_2$ для заданных трех скоростей движения $v_1$=*2,8 м/с (10 км/ч),* $v_2$=*8,3 м/с (30 км/ч)* и $v_3$=*13,9 м/с (50 км/ч).* При числовом интегрировании область частот ограничить диапазоном $-4\omega_2 \le \omega \le 4\omega_2$, где $\omega_2$=*20* $c^{-1}$ – высшая собственная частота системы.

В конце расчетно-пояснительной записки сделать заключение, в котором следует указать значения собственных частот системы, среднеквадратического ускорения в точке размещения сиденья водителя и вероятности $p_2$.

### 2.3. Указания и пример решения задачи для двухосного автомобиля

Условие задачи примера

Расчетная схема автомобиля показана на рис. 2.4. Числовые данные:

$M_\alpha$=5000 кг; $\rho$=1,86 м; $l_1$=2,4 м; $l_2$=1,5 м; $l_к$=2 м; $m_1=m_2$=800 кг, $c_1=c_2=c=4\cdot10^5$ Н/м; $c_{ш1}=c_{ш2}=c_ш=10^6$ Н/м; $b_1=b_2=b=1{,}5\cdot10^4$ Н·с/м; $J=M_\alpha\rho^2=5000\cdot1{,}86^2=17300$ кг·м$^2$. Спектральная плотность микропрофиля дороги $S_y(\theta)=\dfrac{D_y\cdot d_0}{\pi\left(d_0^2+\theta^2\right)}$, где $D_y=2\cdot10^{-4}$ м$^2$; $d_0=0{,}133$ м$^{-1}$; $\left(-\infty\le\theta\le+\infty\right)$.

Для заданного транспортного средства требуется:

1) составить дифференциальные уравнения малых вертикальных и угловых колебаний в продольно-вертикальной плоскости, являющейся плоскостью симметрии машины;

2) найти условие, при котором вертикальные и угловые колебания передней и задней подвесок автомобиля становятся независимыми;

3) принимая справедливым условие независимости колебаний (см. п. 2), построить двухмассовые эквивалентные динамические схемы системы подрессоривания машины и соответствующие им математические модели, на основе которых провести расчеты по нижеследующим пунктам;

4) определить циклические ($c^{-1}$) и технические (*Гц*) частоты и формы собственных колебаний автомобиля;

5) вычислить передаточные функции от внешнего воздействия (микропрофиля дороги) к перемещениям, скоростям и ускорениям точек подрессоренной и неподрессоренных масс;

6) сформировать матрицу спектральных плотностей внешних кинематических воздействий на колеса автомобиля;

7) рассчитать матрицу спектральных плотностей для выходных процессов;

8) найти дисперсию и среднеквадратическое отклонение значений вертикальных ускорений в точке *К* (сиденье водителя);

9) определить вероятность события, что за 1000 часов работы динамическая осадка упругого элемента подвески передней оси автомобиля ни разу не превысит $\delta_{ст}$ (статическое значение осадки).

В пунктах 7, 8 и 9 провести числовые расчеты с иллюстрацией графиками для трех скоростей движения транспортного средства $v_1$=2,8 м/с (10 км/ч), $v_2$=8,3 м/с (30 км/ч) и $v_3$=13,9 м/с (50 км/ч).

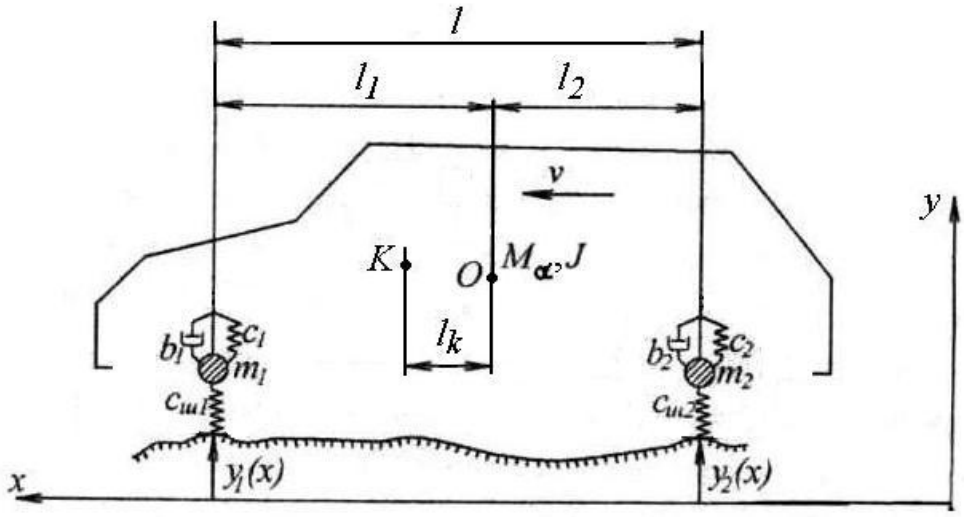



Рис. 2.4

**Решение**

1. *Составим уравнения малых вынужденных колебаний автомобилей.*

Рассматриваем автомобиль как систему с четырьмя степенями свободы (рис. 2.5, а). В качестве обобщенных координат выбираем вертикальные перемещения передней ($q_1$) и задней ($q_2$) неподрессоренных масс и расположенных над ними точек подрессоренной массы кузова ($z_1$ и $z_2$).

Дадим обобщенным координатам малые перемещения $q_1$, $q_2$, $z_1$, $z_2$ и скорости $\dot{z}_1$, $\dot{z}_2$, $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ в положительных направлениях. С учетом зависимости $x=vt$ законы $y_1(x)$ и $y_2(t)$ пересчитываются во временную область $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – случайные процессы, действующие на колеса автомобиля.

Составим выражения для кинетической $T$, потенциальной $П$ энергий и диссипативной функции $Ф$:

$$T = \frac{1}{2}\left[ m_1\dot{q}_1^2 + m_2\dot{q}_2^2 + M_\alpha\left(\frac{l_2\dot{z}_1 + l_1\dot{z}_2}{l}\right)^2 + J\left(\frac{\dot{z}_1 - \dot{z}_2}{l}\right)\right];$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\left[c_{ш1}(q_1 - f_1)^2 + c_1(z_1 - q_1)^2 + c_{ш2}(q_2 - f_2)^2 + c_2(z_2 - q_2)^2\right];$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\left[b_1(\dot{z}_1 - \dot{q}_1)^2 + b_2(\dot{z}_2 - \dot{q}_2)^2\right].$$

Подставив выражения для *T, П* и *Ф* в уравнение Лагранжа II рода:

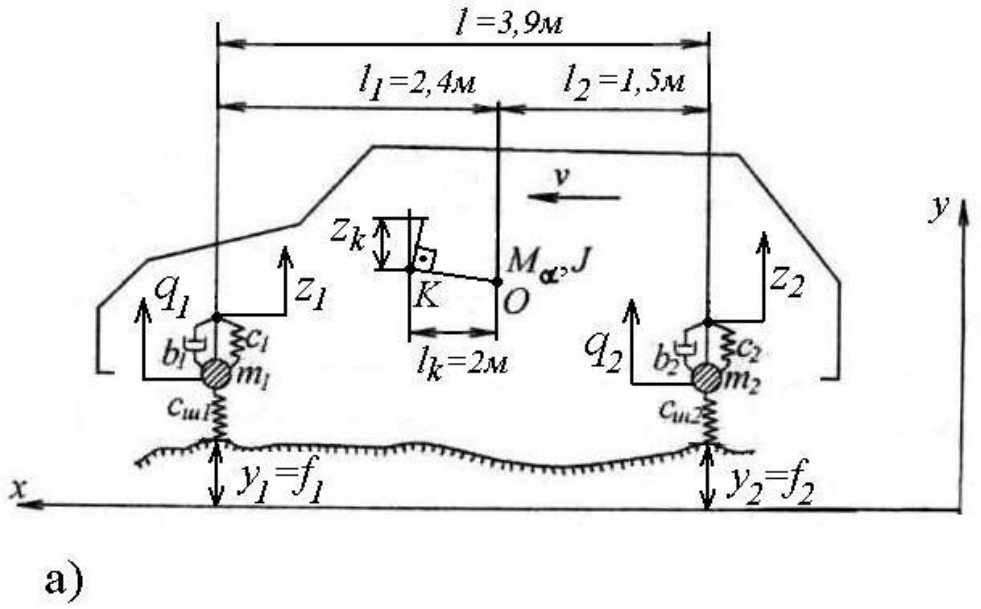
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \quad i \in (1,...,4)$$

где $q_1 = q_1, \quad q_2 = q_2, \quad q_3 = z_1, \quad q_4 = z_2,$

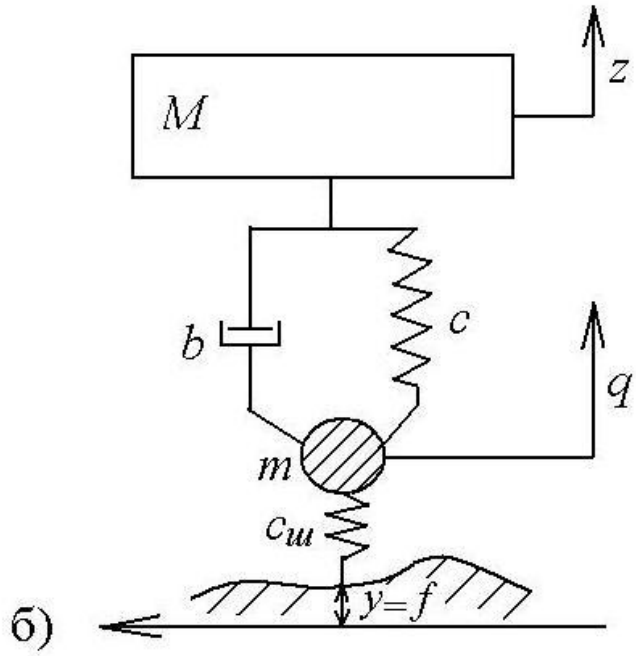
и после преобразований, получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
&m_1\ddot{q}_1 - b_1(\dot{z}_1 - \dot{q}_1) + c_{ш1}(q_1 - f_1) - c_1(z_1 - q_1) = 0;\\
&m_2\ddot{q}_2 - b_2(\dot{z}_2 - \dot{q}_2) + c_{ш2}(q_2 - f_2) - c_2(z_2 - q_2) = 0;\\
&M_\alpha\left(\frac{l_2\ddot{z}_1 + l_1\ddot{z}_2}{l}\right) + b_1(\dot{z}_1 - \dot{q}_1) + b_2(\dot{z}_2 - \dot{q}_2) + c_1(z_1 - q_1) + c_2(z_2 - q_2) = 0; \qquad (2.21)\\
&J\left(\frac{\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2}{l}\right) + b_1(\dot{z}_1 - \dot{q}_1)l_1 - b_2(\dot{z}_2 - \dot{q}_2)l_2 + c_1(z_1 - q_1)l_1 - c_2(z_2 - q_2)l_2 = 0.
\end{aligned}$$

В полученной системе уравнений первые два уравнения описывают движение подвесок (неподрессоренных масс), а третье и четвертое – соответственно линейное и угловое движения кузова (подрессоренной массы).




а)




б)

Рис. 2.5

*2. Найдем условие, при котором вертикальные колебания передней и задней подвесок становятся независимыми.*

Обозначим силы взаимодействия подвесок с кузовом через $F_1$ и $F_2$, т.е.:

$$b_1(\dot{z}_1 - \dot{q}_1) + c_1(z_1 - q_1) = F_1;$$
$$b_2(\dot{z}_2 - \dot{q}_2) + c_2(z_2 - q_2) = F_2.$$

Тогда, решив последние два уравнения системы (2.21) относительно $F_1$ и $F_2$, получим:

$$F_1 = -\frac{\left(M_\alpha l_2^2 + J\right)}{l^2}\ddot{z}_1 - \frac{\left(M_\alpha l_1 l_2 - J\right)}{l^2}\ddot{z}_2;$$

$$F_2 = -\frac{\left(M_\alpha l_1^2 + J\right)}{l^2}\ddot{z}_2 - \frac{\left(M_\alpha l_1 l_2 - J\right)}{l^2}\ddot{z}_1.$$

В этих выражениях вторые члены в правых частях характеризуют связь между колебаниями передней и задней частей автомобиля. Если учесть, что для рассматриваемого автомобиля распределение подрессоренной массы соответствует:

$$\varepsilon = \frac{J}{M_\alpha l_1 l_2} = \frac{M_\alpha \rho^2}{M_\alpha l_1 l_2} = \frac{\rho^2}{l_1 l_2} = \frac{1{,}86^2}{2{,}4 \cdot 1{,}5} = 0{,}96,$$

т.е. близко к единице $(0{,}8 \le \varepsilon \le 1{,}2)$, то можно считать колебания передней части, описываемые координатами $q_1$, $z_1$, и колебания задней части, описываемые координатами $q_2$, $z_2$, практически независимыми друг от друга.

*3. Двухмассовые эквивалентные динамические схемы системы подрессоривания автомобиля и их математические модели.*

Считая справедливым условие независимости колебаний передней и задней подвесок, из системы (2.21) получаем две независимые системы уравнений и при дальнейших аналитических расчетах исходим из двухмассовой системы ($m_1$, $M_1$) или ($m_2$, $M_2$) (рис. 2.5, б, индексы «1», «2» опущены), на которые распадается динамическая схема автомобиля. Части подрессоренной массы, приходящиеся на упругие элементы подвесок, равны:

$$M_1 = \frac{M_\alpha l_2^2 + J}{l^2} \approx \frac{M_\alpha l_2^2 + M_\alpha l_1 l_2}{l^2} = M_\alpha \frac{l_2}{l} = \frac{5000 \cdot 1{,}5}{3{,}9} = 1923\ кг;$$

$$M_2 = \frac{M_\alpha l_1^2 + J}{l^2} \approx \frac{M_\alpha l_1^2 + M_\alpha l_1 l_2}{l^2} = M_\alpha \frac{l_1}{l} = \frac{5000 \cdot 2{,}4}{3{,}9} = 3077\ кг.$$

Уравнения движения двухмассовой системы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &M \cdot \ddot{z} + b\left(\dot{z} - \dot{q}\right) + c\left(z - q\right) = 0; \\ &m \cdot \ddot{q} - b\left(\dot{z} - \dot{q}\right) - c\left(z - q\right) + c_ш\left(q - f\right) = 0. \end{aligned} \qquad (2.22)$$

*4. Определение частот и форм собственных колебаний автомобиля.*

Рассмотрим свободные колебания автомобиля на основе эквивалентной динамической схемы, показанной на рис. 2.5, б. Положим внешнее воздействие *f=0*, а также имея в виду, что диссипативные силы не оказывают существенного влияния на частоты и формы свободных колебаний системы, примем *b=0*. Уравнения движения получают вид:

$$\begin{aligned} &M \cdot \ddot{z} + c(z-q) = 0; \\ &m \cdot \ddot{q} - c(z-q) + c_ш q = 0. \end{aligned} \qquad (2.23)$$

Решение этих уравнений может быть найдено в виде:

$$\begin{aligned} &z = A_z \cdot \cos(\omega t + \beta); \\ &q = A_q \cdot \cos(\omega t + \beta), \end{aligned} \qquad (2.24)$$

где $A_z$, $A_q$ – амплитуды;

$\omega$ – циклическая собственная частота;

$\beta$ – фазовый угол.

Подставив (2.24) в (2.23), получим систему однородных алгебраических уравнений относительно амплитуд $A_z$, и $A_q$:

$$\begin{cases} \left(c - \omega^2 M\right) \cdot A_z - c \cdot A_q = 0; \\ -c \cdot A_z + \left(c + c_ш - \omega^2 m\right) \cdot A_q = 0. \end{cases} \qquad (2.25)$$

Эта система уравнений имеет ненулевые решения, если ее определитель $\Delta(\omega^2) = 0$. Или в развернутом виде:

$$\begin{vmatrix} \left(c - \omega^2 M\right) & -c \\ -c & \left(c + c_ш - \omega^2 m\right) \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.26)$$

Условие (2.26) дает следующее характеристическое уравнение:

$$M \cdot m \cdot \omega^4 - \left(c \cdot m + c \cdot M + c_ш M\right) \cdot \omega^2 + c \cdot c_ш = 0. \qquad (2.27)$$

Введем обозначения:

$$\frac{c}{M} = p_1^2; \quad \frac{c + c_ш}{m} = p_2^2; \quad \frac{c_ш}{m} = p_3^2.$$

Тогда уравнение (2.27) можно записать в виде:

$$\omega^4 - \left(p_1^2 + p_2^2\right)\cdot\omega^2 + p_1^2 p_3^2 = 0\,. \qquad (2.28)$$

Корни уравнения (2.28) дают следующие значения собственных частот колебательной системы, эквивалентной двухосной колесной машине (см. рис. 2.5, б):

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{p_1^2 + p_2^2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2 - 4p_1^2 p_3^2}}\,;$$
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2 - 4p_1^2 p_3^2}}\,. \qquad (2.29)$$

Частота $\omega_1$ называется низкой, или основной собственной частотой, ее можно условно считать частотой подрессоренной части $M$. Частота $\omega_2$ называется высокой собственной частотой, или частотой колебаний неподрессоренной массы $m$.

Для высокой частоты разница между парциальной частотой $p_2 = \sqrt{\frac{c + c_ш}{m}}$ и частотой $\omega_2$ обычно невелика. Значение основной собственной частоты с достаточной для практики точностью можно получить, заменив в выражении $p_1 = \sqrt{\frac{c}{M}}$ жесткость подвески $c$ приведенной жесткостью $c_{пр}$, учитывающей жесткость шин.

С учетом вышесказанного, приближенные значения собственных частот можно определить по следующим формулам:

$$\omega_1 \approx \sqrt{\frac{c_{пр}}{M}} = \sqrt{\frac{c\cdot c_{пр}}{M\cdot\left(c + c_ш\right)}}\,;$$
$$\omega_2 \approx \sqrt{\frac{c + c_ш}{m}}\,. \qquad (2.29,\ а)$$

Для определения собственных форм воспользуемся первым из уравнений (2.25) (тоже можно получить и из второго уравнения):

$$\frac{A_q}{A_z} = \frac{c - \omega^2 M}{c}\,. \qquad (2.30)$$

Положив в (2.30) $\omega^2 = \omega_1^2$, получим соотношение между амплитудами $A_z$, и $A_q$ при колебаниях по первой собственной форме:

$$\frac{A_{q1}}{A_{z2}} = \frac{c - \omega_1{}^2 M}{c} = V_1 . \qquad (2.31)$$

При $\omega^2 = \omega_2^2$ – по второй собственной форме:

$$\frac{A_{q2}}{A_{z2}} = \frac{c - \omega_2{}^2 M}{c} = V_2 . \qquad (2.32)$$

Числовые расчеты.

Для передней части автомобиля.

$$p_1^2 = \frac{c_1}{M_1} = \frac{4 \cdot 10^5}{1923} = 208\, c^{-2},$$

$$p_2^2 = \frac{c_1 + c_{ш1}}{m_1} = \frac{4 \cdot 10^5 + 10^6}{800} = 1750\, c^{-2},$$

$$p_3^2 = \frac{c_{ш1}}{m_1} = \frac{10^6}{800} = 1250\, c^{-2}.$$

В соответствии с формулами (2.29) запишем:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{p_1^2 + p_2^2}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2 - 4 p_1^2 p_3^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{208 + 1750}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{(208 + 1750)^2 - 4 \cdot 208 \cdot 1250}} = \sqrt{979 \mp 835{,}5}\, c^{-1}.$$

Откуда получим собственные частоты:

циклические

$$\omega_1 = \sqrt{143{,}5} = 12{,}0\, c^{-1};$$

$$\omega_2 = \sqrt{1814{,}5} = 42{,}6\, c^{-1};$$

технические

$$\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{12{,}0}{2\pi} = 1{,}9 \ Гц,$$

$$\nu_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{42{,}6}{2\pi} = 6{,}8 \ Гц.$$

Собственные формы колебаний по формулам (2.31) и (2.32):

первая форма $V_1 = \dfrac{A_{q_1 1}}{A_{z_1 1}} = \dfrac{c - \omega_1{}^2 M}{c} = \dfrac{4 \cdot 10^5 - 12^2 \cdot 1923}{4 \cdot 10^5} = 0{,}31;$

вторая форма $V_2 = \dfrac{A_{q_1 2}}{A_{z_1 2}} = \dfrac{c - \omega_2{}^2 M}{c} = \dfrac{4 \cdot 10^5 - 42{,}6^2 \cdot 1923}{4 \cdot 10^5} = -7{,}72.$

Убедимся в ортогональности этих форм:

$$M_1 \cdot A_{z_1 1} \cdot A_{z_1 2} + m_1 \cdot V_1 \cdot A_{z_1 1} \cdot V_2 \cdot A_{z_1 2} = A_{z_1 1} \cdot A_{z_1 2} \cdot \left(M_1 + m_1 \cdot V_1 \cdot V_2\right) =$$
$$= A_{z_1 1} \cdot A_{z_1 2} \cdot \left(1923 - 800 \cdot 0{,}31 \cdot 7{,}72\right) \approx 0.$$

Дополнительно к проведенному расчету найдем собственные частоты по приближенным формулам (2.29, а):

$$\omega_1^{\,*} = \sqrt{\frac{c_1 \cdot c_{ш1}}{M_1 \cdot \left(c_1 + c_{ш1}\right)}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^5 \cdot 10^6}{1923 \cdot \left(4 \cdot 10^5 + 10^6\right)}} = 12{,}2\, c^{-1};$$

$$\omega_2^{\,*} = \sqrt{\frac{c_1 + c_{ш1}}{m_1}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^5 + 10^6}{800}} = 41{,}8\, c^{-1}.$$

Видим, что приближенные значения собственных частот отличаются от точных значений менее чем на 2%.

Для задней части автомобиля.

$$p_1^2 = \frac{c_2}{M_2} = \frac{4 \cdot 10^5}{3077} = 130\, c^{-2},$$

$$p_2^2 = \frac{c_2 + c_{ш2}}{m_2} = \frac{4 \cdot 10^5 + 10^6}{800} = 1750\, c^{-2},$$

$$p_3^2 = \frac{c_{ш2}}{m_2} = \frac{10^6}{800} = 1250\, c^{-2}.$$

В соответствии с формулами (2.29) запишем:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{p_1^2 + p_2^2}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2 - 4 p_1^2 p_3^2}} =$$
$$= \sqrt{\frac{130 + 1750}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\left(130 + 1750\right)^2 - 4 \cdot 130 \cdot 1250}} = \sqrt{940 \mp 840}\, c^{-1}.$$

Откуда получим собственные частоты:

циклические $\omega_1 = 9{,}54 c^{-1};$

$\omega_2 = 42{,}3 c^{-1};$

технические $\nu_1 = \dfrac{\omega_1}{2\pi} = \dfrac{9{,}54}{2\pi} = 1{,}52$ *Гц*,

$\nu_2 = \dfrac{\omega_2}{2\pi} = \dfrac{42{,}3}{2\pi} = 6{,}73$ *Гц*.

Собственные формы колебаний по формулам (2.31) и (2.32):

первая форма $V_1 = \dfrac{A_{q_1 1}}{A_{z_1 1}} = \dfrac{c - \omega_1{}^2 M}{c} = \dfrac{4 \cdot 10^5 - 9{,}54^2 \cdot 3077}{4 \cdot 10^5} = 0{,}30;$

вторая форма $V_2 = \dfrac{A_{q_1 2}}{A_{z_1 2}} = \dfrac{c - \omega_2{}^2 M}{c} = \dfrac{4 \cdot 10^5 - 42{,}3^2 \cdot 3077}{4 \cdot 10^5} = -12{,}8.$

Убедимся в ортогональности этих форм:

$$M_1 \cdot A_{z_1} \cdot A_{z_2} + m_1 \cdot V_1 \cdot A_{z_1} \cdot V_2 \cdot A_{z_2} = A_{z_1} \cdot A_{z_2} \cdot \left(M_1 + m_1 \cdot V_1 \cdot V_2\right) =$$
$$= A_{z_1} \cdot A_{z_2} \cdot \left(3077 - 800 \cdot 0{,}30 \cdot 12{,}8\right) \approx 0.$$

5. *Расчет передаточных функций от внешнего воздействия (микропрофиля дороги) к перемещениям, скоростям и ускорениям точек подрессоренной и неподрессоренной масс.*

Уравнения движения двухмассовой системы (2.22) в векторно-матричном виде:

$$M \cdot \ddot{\vec{q}} + B \cdot \dot{\vec{q}} + C \cdot \vec{q} = D \cdot \vec{f}(t),$$

где $M = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b & -b \\ -b & b \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} c & -c \\ -c & c + c_w \end{pmatrix};$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_w \end{pmatrix}; \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} z \\ q \end{pmatrix}; \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Матрица передаточных функций определяется как:

$$H_{\vec{q}}(i\omega) = \left[H_{kj}(i\omega)\right] = \left[-\omega^2 M + i\omega B + C\right]^{-1} \cdot D, \quad (k, j = 1{,}2).$$

В соответствии с правилами вычисления обратных матриц получим:

$$\left[-\omega^2 M + i\omega B + C\right]^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} c + c_ш - \omega^2 m + i\omega b & c + i\omega b \\ c + i\omega b & c - \omega^2 M + i\omega b \end{pmatrix},$$

где $\Delta = \left(c - \omega^2 M\right)\cdot\left(c + c_ш - \omega^2 m\right) - c^2 + i\omega b\cdot\left(c_ш - \omega^2 M - \omega^2 m\right),$

или в виде $\Delta = Mm\omega^4 - \left[M\left(c + c_ш\right) + mc\right]\omega^2 + cc_ш - i\omega b\cdot\left[\omega^2\left(M + m\right) - c_ш\right].$

Тогда элементы матрицы передаточных функций к перемещениям q и z будут равны:

$$H_{\bar{q}}(i\omega) = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$H_{11}(i\omega) = 0;\ H_{12}(i\omega) = \frac{c_ш\cdot\left(c + i\omega b\right)}{\Delta};$$

$$H_{21}(i\omega) = 0;\ H_{22}(i\omega) = \frac{c_ш\left(c - \omega^2 M + i\omega b\right)}{\Delta}.$$

Матрицы передаточных функций к скоростям $\dot{q}, \dot{z}$ и ускорениям $\ddot{q}, \ddot{z}$ связаны с матрицей $H_{\bar{q}}(i\omega)$ через $\omega^2$ и $\omega^4$ соответственно:

$$H_{\dot{\bar{q}}}(i\omega) = \omega^2\cdot H_{\bar{q}}(i\omega);$$

$$H_{\ddot{\bar{q}}}(i\omega) = \omega^4\cdot H_{\bar{q}}(i\omega).$$

*6. Формирование матрицы спектральных плотностей внешних кинематических воздействий на колеса автомобиля.*

При переходе от профиля дороги *y(x)* к кинематическим воздействиям *f(t)* на колеса автомобиля необходимо учитывать скорость движения *v* и сглаживающую способность шин колес. Методика такого расчета рассмотрена в примере решения задачи для четырехосного транспортного средства (см. п. 2.2, с. 17-19).

Окончательный вид спектральной плотности микропрофиля дороги $S_f(\omega)$ с учетом сглаживания шины и скорости движения дается формулой (2.15).

Тогда матрица спектральных плотностей кинематических воздействий для двухмассовой эквивалентной схемы автомобиля будет иметь вид:

$$S_{\vec{f}}(\omega)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & S_f(\omega)\end{bmatrix}.$$

7. *Расчет матрицы спектральных плотностей выходных процессов*.

Для вектора случайных процессов на выходе $\vec{q}(t)$ можно найти матрицу спектральных плотностей $[S_{q_k q_j}(\omega)]$ по следующему соотношению:

$$S_{\vec{q}}(\omega)=\begin{bmatrix}S_z(\omega) & S_{zq}(\omega)\\ S_{qz}(\omega) & S_q(\omega)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_{11}^* & H_{12}^*\\ H_{21}^* & H_{22}^*\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & S_f(\omega)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}H_{11} & H_{12}\\ H_{21} & H_{22}\end{bmatrix}^T=$$

$$=\begin{bmatrix}H_{12}^*H_{12}S_y & H_{12}^*H_{22}S_f\\ H_{22}^*H_{12}S_y & H_{22}^*H_{22}S_f\end{bmatrix},$$

где * - знак комплексно-сопряженной величины;

$T$ – знак транспонирования;

$S_f(\omega)$ – спектральная плотность микронеровностей дороги.

Спектральная плотность случайного процесса *z(t)* – смещений точки подрессоренной массы, к которой крепится подвеска:

$$S_z(\omega)=H_{12}^*(i\omega)\cdot H_{12}(i\omega)\cdot S_f(\omega)=\frac{c_ш^2\left(c^2+\omega^2b^2\right)}{\Delta^*\cdot\Delta}\cdot S_f(\omega),$$

где $\Delta^*\cdot\Delta=\left\{Mm\omega^4-\left[M\left(c+c_ш\right)+mc\right]\omega^2+c\cdot c_ш\right\}^2+b^2\omega^2\left[\omega^2\left(M+m\right)-c_ш\right]^2.$

Спектральная плотность случайного процесса *q(t)* – смещений неподрессоренной массы:

$$S_q(\omega)=H_{22}^*(i\omega)\cdot H_{22}(i\omega)\cdot S_f(\omega)=\frac{c_ш^2\left(\left(c-\omega^2M\right)+\omega^2b^2\right)}{\Delta^*\cdot\Delta}\cdot S_f(\omega).$$

Взаимная спектральная плотность процессов *z(t)* и *q(t)*:

$$S_{zq}(\omega)=H_{12}^*(i\omega)\cdot H_{22}^*(i\omega)\cdot S_f(\omega)=\frac{c_ш^2\left[\left(c^2-\omega^2cM+\omega^2b^2\right)+i\omega^3bM\right]}{\Delta^*\cdot\Delta}\cdot S_f(\omega).$$

Спектральные плотности скоростей и ускорений случайных процессов *z(t)* и *q(t)* могут быть найдены по следующим формулам:

$$S_{\dot{z}}(\omega) = \omega^2 \cdot S_z(\omega);$$
$$S_{\ddot{z}}(\omega) = \omega^4 \cdot S_z(\omega);$$
$$S_{\dot{q}}(\omega) = \omega^2 \cdot S_q(\omega);$$
$$S_{\ddot{q}}(\omega) = \omega^4 \cdot S_q(\omega).$$

По полученным выражениям с помощью ЭВМ (например, в среде MathCAD) следует построить графики изменения спектральных плотностей $S_q(\omega)$, $S_z(\omega)$ в зависимости от ω ($-4\omega_2 \le \omega \le 4\omega_2$, где $\omega_2$=42,6 $c^{-1}$ – высшая собственная частота системы) для передней и задней подвесок и трех скоростей движения $v_1$=2,8 м/с (10 км/ч), $v_2$=8,3 м/с (30 км/ч) и $v_3$=13,9 м/с (50 км/ч).

*8. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение значений ускорения в точке К (сиденье водителя).*

Выразим смещение $z_k$ через перемещение точек крепления подвесок $z_1$ и $z_2$ (см. рис. 2.5, а):

$$z_k = k_1 z_1 + k_2 z_2,$$

где $k_1 = \frac{l_k}{l} + \frac{l_2}{l}; \quad k_2 = \frac{l_1}{l} - \frac{l_k}{l}.$

Передаточная функция от $z_1$, $z_2$ к $z_k$:

$$H_{z_k} = (k_1; k_2).$$

Спектральная плотность смещения в точке *К*:

$$S_{z_k}(\omega) = H^*_{z_k} \cdot S_{\bar{z}}(\omega) \cdot H^T_{z_k} = (k_1; k_2) \cdot \begin{pmatrix} S_{z_1}(\omega) & S_{z_1 z_2}(\omega) \\ S_{z_2 z_1}(\omega) & S_{z_2}(\omega) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} =$$
$$= k_1^2 S_{z_1}(\omega) + 2k_1 k_2 \,\mathrm{Re}(S_{z_1 z_2}(\omega)) + k_2^2 S_{z_2}(\omega).$$

Здесь $S_{z_1}(\omega) = \frac{c_{ш1}^2 \left(c_1^2 + \omega^2 b_1^2\right)}{\Delta_1^* \cdot \Delta_1} \cdot S_f(\omega),$

где $\Delta^*_1 \cdot \Delta_1 = \left\{M_1 m_1 \omega^4 - \left[M_1 \left(c_1 + c_{ш1}\right) + m_1 c_1\right]\omega^2 + c_1 \cdot c_{ш1}\right\}^2 + b_1{}^2 \omega^2 \left[\omega^2 (M_1 + m_1) - c_{ш1}\right]^2;$

$$S_{z_2}(\omega) = \frac{c_{ш2}^2 \left(c_2^2 + \omega^2 b_2^2\right)}{\Delta_2^* \cdot \Delta_2} \cdot S_f(\omega),$$

где

$$\Delta^*_2 \cdot \Delta_2 = \left\{M_2 m_2 \omega^4 - \left[M_2\left(c_2 + c_{ш2}\right) + m_2 c_2\right]\cdot \omega^2 + c_2 \cdot c_{ш2}\right\}^2 + b_2{}^2 \omega^2 \left[\omega^2\left(M_2 + m_2\right) - c_{ш2}\right]^2.$$

Взаимная спектральная плотность $S_{z_1 z_2}(\omega)$ процессов $z_1(t)$ и $z_2(t)$:

$$S_{\bar{z}}(\omega) = \begin{pmatrix} S_{z_1}(\omega) & S_{z_1 z_2}(\omega) \\ S_{z_2 z_1}(\omega) & S_{z_2}(\omega) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} H^*_{12\,per} & 0 \\ 0 & H^*_{12\,zad} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_{f_1}(\omega) & S_{f_1 f_2}(\omega) \\ S_{f_2 f_1}(\omega) & S_{f_2}(\omega) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H_{12\,per} & 0 \\ 0 & H_{12\,zad} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} H^*_{12\,per} H_{12\,per} S_{f_1}(\omega) & H^*_{12\,per} H_{12\,zad} S_{f_1 f_2}(\omega) \\ H^*_{12\,zad} H_{12\,per} S_{f_2 f_1}(\omega) & H^*_{12\,zad} H_{12\,zad} S_{f_2}(\omega) \end{pmatrix},$$

где дополнительные индексы «*per*» и «*zad*» указывают на принадлежность к передней и задней подвескам соответственно;

$$S_{f_1}(\omega) = S_{f_2}(\omega) = S_f(\omega);$$

$$S_{f_1 f_2}(\omega) = S^*_{f_2 f_1}(\omega) = \frac{1}{\upsilon} e^{i\omega\frac{l}{\upsilon}} S_f\left(\frac{\omega}{\upsilon}\right).$$

Таким образом,

$$S_{z1z2}(\omega) = H^*_{12\,per} \cdot H_{12\,zad} \cdot S_{f1f2}(\omega) = \frac{c_{ш1}(c_1 - i\omega b_1)}{\Delta^*_1} \cdot \frac{c_{ш2}(c_2 - i\omega b_2)}{\Delta_2} \cdot S_{f1f2}(\omega).$$

Дисперсия ускорений $\ddot{z}_k$ на сиденье водителя:

$$D_{\ddot{z}_k} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 \cdot S_{z_k}(\omega) \cdot d\omega.$$

Среднеквадратическое отклонение значений ускорений $\ddot{z}_k$:

$$s_{\ddot{z}_k} = \sqrt{D_{\ddot{z}_k}}.$$

По полученным выражениям с помощью ЭВМ (например, в среде MathCAD) следует построить графики изменения спектральной плотности $S_{\ddot{z}_k}(\omega)$ в зависимости от $\omega$ ($-4\omega_2 \le \omega \le 4\omega_2$, где $\omega_2$=42,6 $c^{-1}$ – высшая собственная частота системы) для заданных трех скоростей движения $v_1$=2,8 *м/с (10 км/ч),* $v_2$=8,3 *м/с (30 км/ч)* и $v_3$=13,9 *м/с (50 км/ч).* Путем численного

интегрирования этих графиков найти дисперсии и среднеквадратические отклонения ускорения $\ddot{z}_k$.

*9. Определение вероятности события, что за 1000 часов работы динамическая осадка упругого элемента передней подвески автомобиля ни разу не превысит $\delta_{ст}$.*

Статическая осадка упругого элемента передней подвески:

$$\delta_{ст} = \frac{M_1 \cdot g}{c_1} = \frac{1923 \cdot 10}{4 \cdot 10^5} = 0{,}048 \ м.$$

Динамическая осадка (деформация) упругого элемента:

$$\delta_1 = z_1 - q_1.$$

Передаточная функция от $z_1$, $q_1$ к $\delta_1$:

$$H_{\delta_1}(i\omega) = (1;-1).$$

Спектральная плотность деформаций упругого элемента:

$$S_{\delta_1}(\omega) = (1;-1) \cdot \begin{pmatrix} S_{z_1}(\omega) & S_{z_1 q_1}(\omega) \\ S_{q_1 z_1}(\omega) & S_{q_1}(\omega) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= S_{z_1}(\omega) - 2_2 \operatorname{Re}(S_{z_1 q_1}(\omega)) + S_{q_1}(\omega).$$

После подстановки выражений $S_{z_1}(\omega)$, $S_{z_1 q_1}(\omega)$, $S_{q_1}(\omega)$ получим:

$$S_{\delta 1}(\omega) = \frac{c_{ш1} M_1^2 \omega^4}{\Delta_1^* \cdot \Delta_1} \cdot S_f(\omega).$$

Спектральная плотность скорости $\dot{\delta}_1(t)$:

$$S_{\dot{\delta}_1}(\omega) = \omega^2 \cdot S_{\delta_1}(\omega).$$

Дисперсия деформаций упругого элемента:

$$D_{\delta_1} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\delta_1}(\omega) \cdot d\omega.$$

Дисперсия скорости $\dot{\delta}_1(t)$:

$$D_{\dot{\delta}_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \cdot S_{\delta_1}(\omega) \cdot d\omega.$$

Эффективная циклическая частота процесса $\delta_1(t)$:

$$\overline{\omega}_\delta = \sqrt{\frac{D_{\dot{\delta}_1}}{D_{\delta_1}}}.$$

Вероятность выброса значений $\delta_1(t)$ за $\delta_{cm}$ по формуле Райса:

$$p_1 = P\left\{\delta_1(t) \rangle \delta_{cm},\ t = 1000 \cdot 60 \cdot 60 = 36 \cdot 10^5 c\right\} = \frac{t}{2\pi} \cdot \overline{\omega}_{\delta_1} \cdot \exp\left\{-\frac{\delta_{cm}^2}{2D_{\delta_1}}\right\}.$$

Вероятность противоположного события, состоящего в том, что за 1000 часов работы деформация упругого элемента передней подвески автомобиля ни разу не превысит $\delta_{cm}$:

$$p_2 = P\left\{\delta_1(t) \langle \delta_{cm},\ t = 36 \cdot 10^5 c\right\} = 1 - p_1.$$

По полученным выражениям с помощью ЭВМ (например, в среде MathCAD) следует провести числовые расчеты вероятности $p_2$ для заданных трех скоростей движения $v_1$*=2,8 м/с (10 км/ч),* $v_2$*=8,3 м/с (30 км/ч)* и $v_3$*=13,9 м/с (50 км/ч)*. При числовом интегрировании область частот ограничить диапазоном $-4\omega_2 \le \omega \le 4\omega_2$, где $\omega_2$*=42,6* $c^{-1}$ – высшая собственная частота системы.

В конце расчетно-пояснительной записки сделать заключение, в котором следует указать значения собственных частот системы, дисперсии и среднеквадратического ускорения в точке размещения сиденья водителя и вероятности $p_2$.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний: Учебник для вузов. – М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. – 414с.

2. Гусев А.С. Надежность механических систем и конструкций при случайных воздействиях / А.С. Гусев, А.Л. Карунин, Н.А. Крамской, С.А. Стародубцева. – М.: МГТУ «МАМИ», 2001. – 284с.

3. Гусев А.С. Теория колебаний в автомобиле- и тракторостроении / А.С. Гусев, А.Л. Карунин, Н.А. Крамской, С.А. Стародубцева, В.И. Щербаков. – М.: МГТУ «МАМИ», 2007. – 336с.

4. Светлицкий В.А. Статистическая механика и теория надежности. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 504с.

5. Щербаков В.И. Избранные задачи по динамике механических систем и конструкций. 2-е издание, испр. и доп. / В.И. Щербаков, И.С. Чабунин, С.А, Стародубцева. – М.: МГТУ «МАМИ», 2010. – 288с.

6. Яценко Н.Н. Поглощающая и сглаживающая способность шин. – М.: Машиностроение, 1978. – 132с.