Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Максимов Алексей Борисович
Должность: директор департамента по образовательной политике
Дата подписания: 10.06.2025 14:48:24
Уникальный программный ключ:
8db180d1a3f02ac9e60521a672ea3085406d6c59

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХ)

Транспортный факультет

УТВЕРЖДАЮ
И.о. декана
_____ /М.Р. Рыбакова/
«27» февраля 2025г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Основы вариационного исчисления

Направление подготовки/специальность
15.03.03 Прикладная механика

Профиль/специализация
Программирование и цифровые технологии в динамике и прочности

Квалификация
бакалавр

Формы обучения
Очная

Москва, 2025 г

Разработчик

доц., канд. физ.-матем. наук _____ _____ / Е.А. Коган /

И.о. зав. кафедрой «Математика»

канд. физ.-матем. наук _____/Н.В. Васильева/

Согласовано

Зав. кафедрой «Динамика, прочность машин и сопротивление материалов»,

проф., докт. физ.- матем. наук _____/А.А. Скворцов/

2

Содержание

1. Цели, задачи и планируемые результаты обучения по дисциплине……. 4
2. Место дисциплины в структуре образовательной программы…….. 4
3. Структура и содержание дисциплины…….. 5
   - 3.1. Виды учебной работы и трудоемкость…… 5
   - 3.2. Тематический план изучения дисциплины…… 5
   - 3.3. Содержание дисциплины……. 5
   - 3.4. Тематика семинарских/практических и лабораторных занятий…….. 6
4. Учебно-методическое и информационное обеспечение……. 6
   - 4.1. Нормативные документы и ГОСТы…….. 6
   - 4.2. Основная литература……..... 7
   - 4.3. Дополнительная литература…… 7
   - 4.4. Электронные образовательные ресурсы…… 7
   - 4.5. Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение…. 7
   - 4.6. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы…….. 8
5. Материально-техническое обеспечение…… 9
6. Методические рекомендации…… 9
   - 6.1. Методические рекомендации для преподавателя по организации обучения 9
   - 6.2. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины…… 10
7. Фонд оценочных средств…….. 11

Приложение 1. Тематический план содержания дисциплины……. 12

Приложение 2. Фонд оценочных средств…….. 15

1. Методы контроля и оценивания результатов обучения…….. 15
2. Шкала и критерии оценивания результатов обучения…… 15
3. Оценочные средства…… 16
   - 3.1. Текущий контроль…….. 16
   - 3.2. Промежуточная аттестация…… 23

1. Цели, задачи и планируемые результаты обучения по дисциплине

К основным *целям* освоения дисциплины «Основы вариационного исчисления» следует отнести:

- воспитание у студентов общей математической культуры;
- приобретение студентами широкого круга математических знаний, умений и навыков;
- развитие способности студентов к индуктивному и дедуктивному мышлению наряду с развитием математической интуиции;
- умение студентами развивать навыки самостоятельного изучения учебной и научной литературы, содержащей математические сведения и результаты;
- подготовку студентов к деятельности в соответствии с квалификационной характеристикой бакалавра по направлению, в том числе формирование умений использовать освоенные математические методы в профессиональной деятельности.
- подготовку высококвалифицированных кадров, востребованных в условиях цифровой турбулентности и высоких технологических рисков современной цифровой экономики.

К основным *задачам* освоения дисциплины «Основы вариационного исчисления» следует отнести:

- освоение студентами основных понятий, методов, формирующих общую математическую подготовку, необходимую для успешного решения прикладных задач;
- формирование у студента требуемого набора компетенций, соответствующих его направлению подготовки и обеспечивающих его конкурентоспособность на рынке труда.

Обучение по дисциплине «Основы вариационного исчисления» направлено на формирование у обучающихся следующих компетенций в соответствии с ФГОС 15.03.03 (уровень бакалавриата) по направлению подготовки 15.03.03 Прикладная механика, утверждённым приказом Минобрнауки России от 09.08.2021 №729:

Код и наименование компетенций	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1. Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности	ИОПК-1.1 Применяет естественнонаучные и общеинженерные знания ИОПК-1.2 Применяет методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к обязательной части блока Б1: Модуль «Математические и естественно-научные дисциплины».

Дисциплина базируется на следующих, пройденных дисциплинах:

- линейная алгебра;
- математический анализ;
- дифференциальные уравнения и комплексный анализ.

Дисциплина «Основы вариационного исчисления» логически связана с последующими дисциплинами:

В обязательной части:

- сопротивление материалов
- аналитическая динамика и теория колебаний;
- метод конечных элементов;
- уравнения математической физики.

В части, формируемой участниками образовательных отношений:

- теория упругости;
- основы физики прочности и механики разрушения;
- цифровые технологии вычислительной математики;
- устойчивость механических систем;
- динамика машин;
- основы аэрогидроупругости;
- механика композитных конструкций;
- строительная механика машин.

В части элективных дисциплин:

- численные методы;
- элементы математического моделирования физических процессов;
- физически нелинейная механика деформируемого твердого тела.

3. Структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетные единицы -72 часа.

3.1. Виды учебной работы и трудоемкость

п/п	Вид учебной работы	Количество часов	Семестр 4
	Аудиторные занятия	36	36
	В том числе:		
1.	Лекции	18	18
2.	Семинарские/практические занятия	18	18
	Лабораторные занятия	-	-
	Самостоятельная работа	36	36
	Промежуточная аттестация		
	экзамен	3	3
	Итого	72	72

3.2. Тематический план изучения дисциплины

Размещён в приложении 1 к рабочей программе.

3.3. Содержание разделов дисциплины

Введение

Предмет, задачи и содержание дисциплины. Основные этапы развития дисциплины. Структура курса, его место и роль в подготовке специалиста, связь с другими дисциплинами.

Раздел 1. Основные понятия вариационного исчисления. Функционал, зависящий от функции одной переменной, вариация функции (аргумента функционала).

Перестановочность операций варьирования и дифференцирования, варьирования и интегрирования. Непрерывный и линейный функционал. Вариация функционала. Экстремум функционала: абсолютный и относительный (локальный). Основная лемма вариационного исчисления. Необходимое условие экстремума. Вариационная задача с неподвижными границами (простейшая вариационная задача). Уравнение Эйлера. Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера. Задачи о брахистохроне и о наименьшей площади поверхности вращения.

Раздел 2. Обобщения простейшей вариационной задачи. Функционалы, зависящие от нескольких функций одной переменной. Функционалы с производными высших порядков. Уравнение Эйлера–Пуассона. Функционалы, зависящие от функций нескольких переменных. Уравнение Эйлера–Остроградского. Вывод волнового уравнения с использованием принципа Гамильтона – Остроградского. Вариационная задача со свободными концами. Вариационная задача с подвижными концами. Условия трансверсальности.

Раздел 3. Вариационные задачи на условный экстремум. Задачи на условный экстремум с конечными и интегральными связями. Изопериметрическая задача.

Раздел 4. Прямые вариационные методы. Общность и различие методов. Метод Ритца (Релея–Ритца). Принцип возможных перемещений Лагранжа. Метод Бубнова–Галеркина. Идея метода конечных элементов. Применение вариационных методов к задаче об изгибе стержня.

3.4. Тематика практических занятий по дисциплине «Основы вариационного исчисления»

№ п/п	Тема занятия
1	Задачи на вычисление вариации функционала
2	Решение простейшей вариационной задачи для функционала
3	Решение простейшей вариационной задачи для функционала, зависящего от нескольких функций
4	Решение уравнения Эйлера – Пуассона
5	Вариационная задача со свободными концами
6	Вариационная задача с подвижными границами
7	Вариационные задачи на условный экстремум
8	Прямые методы вариационного исчисления
9	Контрольное тестирование

4. Учебно-методическое и информационное обеспечение

4.1. Нормативные документы и ГОСТы

1. ФГОС 15.03.03. «Прикладная механика». 2021. Приказ Минобрнауки России от 09.08.2021 №729.
2. Академический учебный план по направлению подготовки: 15.03.03 Прикладная механика. Профиль: Программирование и цифровые технологии в динамике и прочности. Форма обучения – очная. 2023.
3. Матрица распределения компетенций 15.03.03 Прикладная механика (Программирование и цифровые технологии в динамике и прочности). 2023.
4. Указ Президента Российской Федерации от 01.12.2016 № 642 «Стратегии научно-технологического развития Российской Федерации».
5. Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 23.08.2017 № 816 «Об утверждении Порядка применения организациями, осуществляющими

образовательную деятельность, электронного обучения, дистанционных образовательных технологий при реализации образовательных программ».

4.2. Основная литература

1. Коган Е.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения и вариационное исчисление в приложении к расчету автомобильных конструкций. Учебное пособие по дисциплине «Математика» для студентов всех специальностей. М.: МАМИ, 2010. 200 экз. http://lib.mami.ru/lib/content/elektronnyy-katalog. Электронный ресурс.
2. Романко В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления / М.: Изд-во «Лаборатория знаний», 2015. 347 с.

4.3. Дополнительная литература:

1. Романко В.К. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению / В.К Романко, В.В. Власов, Л.И. Коваленко, Н.Х. Агаханов - М.: Изд-во «Бином», 2015. 222 с.
2. Коган Е.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: учебное пособие. – М.: ИНФРА-М, 2020. 293 с. - (Высшее образование: Бакалавриат).
3. Эльсгольц Л.Э. Вариационное исчисление. М.: КомКнига, 2006. 208 с.
4. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселёв А.И. Вариационное исчисление. М.: Наука, 2003. 192 с.

4.4. Электронные образовательные ресурсы

5. Проведение занятий и аттестаций возможно в дистанционном формате с применением системы дистанционного обучения университета (СДО-LMS) на основе разработанных кафедрой «Математика» электронных образовательных ресурсов (ЭОР) по всем разделам программы:.

Название ЭОР	
Основы вариационного исчисления	https://online.mospolytech.ru/course/view.php?id=476
Дифференциальные уравнения	https://online.mospolytech.ru/course/view.php?id=4396

Разработанные ЭОР включают тренировочный и итоговый тесты.
Порядок проведения работ в дистанционном формате устанавливается отдельными распоряжениями проректора по учебной работе и/или центром учебно-методической работы.

Каждый студент обеспечен индивидуальным неограниченным доступом к электронной библиотеке московского политеха
https://online.mospolytech.ru/course/view.php?id=7621&section=1 .
Интернет-ресурсы включают учебно-методические материалы в электронном виде, представленные на сайте mospolytech.ru в разделе: «Центр математического образования» (http://mospolytech.ru/index.php?id=4486,
http://mospolytech.ru/index.php?id=5822);
Полезные учебно-методические и информационные материалы представлены на сайтах:
http://exponenta.ru, *http://eqworld.ipmnet.ru/ru/info/mathwebs.htm*.
Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» для освоения дисциплины: www.matematikalegko.ru>studentu, www.i-exam.ru.

4.5. Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение

№	Наименование	Разработчик ПО (правообладатель)	Доступность (лицензионное, свободно распространяемое)	Ссылка на Единый реестр российских программ для ЭВМ и БД (при наличии)
1	Astra Linux Common Edition	ООО "РУСБИТЕХ-АСТРА"	Лицензионное	https://reestr.digital.gov.ru/reestr/305783/?sphrase_id=954036
2	МойОфис	ООО "НОВЫЕ ОБЛАЧНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ"	Лицензионное	https://reestr.digital.gov.ru/reestr/301558/?sphrase_id=943375

4.6. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

Перечень ресурсов сети Интернет, доступных для освоения дисциплины:

	Наименование	**Ссылка на ресурс**	**Доступность**
Информационно-справочные системы			
	Stack Overflow	https://stackoverflow.com/	Доступна в сети Интернет без ограничений
	Информационные ресурсы Сети КонсультантПлюс	http:// www.consultant.ru	Доступно
	Портал Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования	http://www.fgosvo.ru.	Доступно
Электронно-библиотечные системы			
	Лань	https://e.lanbook.com/	Доступна в сети Интернет без ограничений
	IPR Books	https://www.iprbookshop.ru/	Доступна в сети Интернет без ограничений
Профессиональные базы данных			
	База данных научной электронной библиотеки	http://www.elibrary.ru	Доступно

	(eLIBRARY.RU)		
	Web of Science Core Collection – политематическая реферативно-библиографическая и наукометрическая (библиометрическая) база данных	http://webofscience.com	Доступно

5. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Материально – техническая база университета обеспечивает проведение всех видов занятий, предусмотренных учебным планом, и соответствует действующим санитарным и противопожарным правилам и нормам.

Кафедра «Математика» не располагает собственным аудиторным фондом и использует учебные аудитории из общего фонда университета.

При необходимости для проведения интерактивных практических занятий используются компьютерные классы университета.

6. Методические рекомендации

6.1. Методические рекомендации для преподавателя по организации обучения

Прежде всего, следует обратить внимание студентов на то, что практически весь изучаемый ими материал является для них новым, не изучавшимся ни в программе средней школы, ни в классических разделах высшей математики на первом курсе. Однако он вполне может быть успешно изучен, если студенты будут посещать занятия, своевременно выполнять домашние задания и пользоваться (при необходимости) системой плановых консультаций в течение каждого семестра.

Вошедшие в курс вариационного исчисления разделы практически ориентированы, так как имеют широкое распространение для решения разного рода задач в широком смысле оптимального управления. Их освоение поможет студентам успешно применять накопленные знания в профессиональной деятельности.

Необходимо с самого начала занятий рекомендовать студентам основную и дополнительную литературу, а в конце семестра дать список вопросов для подготовки к экзамену.

На первом занятии по дисциплине обязательно проинформировать студентов о виде и форме промежуточной аттестации по дисциплине, сроках её проведения, условиях допуска к промежуточной аттестации, применяемых видах промежуточного контроля.

Изложение теоретического материала должно сопровождаться иллюстративными примерами, тщательно отобранными преподавателем так, чтобы технические трудности и выкладки при решении задачи не отвлекали от главного: осмысления идеи и сути применяемых методов. Следует всегда указывать примеры практического применения рассмотренных на занятиях уравнений и формул.

Практические занятия должны быть организованы преподавателем таким образом, чтобы оставалось время на периодическое выполнение студентами небольшой самостоятельной работы в аудитории для проверки усвоения изложенного материала.

Преподаватель, ведущий практические занятия, должен согласовывать учебно – тематический план занятий с лектором, использовать единую систему обозначений.

Преподавателю следует добиваться систематической непрерывной работы студентов в течение семестра, необходимо выявлять сильных студентов и привлекать их к научной

работе, к участию в разного рода олимпиадах и студенческих научно-технических конференциях и конкурсах.

Студент должен ощущать заинтересованность преподавателя в достижении конечного результата: в приобретении обучающимися прочных знаний, умений и владения накопленной информацией для решения задач в профессиональной деятельности.

6.1.1. Образовательные технологии

Проведение занятий и аттестаций возможно в дистанционном формате с применением системы дистанционного обучения университета (СДО-LMS) на основе разработанных кафедрой «Математика» электронноых образовательных ресурсов (ЭОР) по всем разделам программы (см. п. 4.4).

Порядок проведения работ в дистанционном формате устанавливается отдельными распоряжениями проректора по учебной работе и/или центром учебно-методической работы.

6.2. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Наряду с задачами исследования экстремумов функций на практике часто возникает необходимость отыскания максимальных и минимальных значений математических выражений более общего вида – так называемых функционалов.

Вариационное исчисление и является разделом математики, посвященным исследованию методов отыскания экстремумов функционалов, зависящих от одной или нескольких функций, при разного рода ограничениях, налагаемых на эти функции.

В настоящее время вариационные методы очень широко применяются в механике и физике.

Понятие функционала является обобщением понятия функции: если функция $y(x)$ - это зависимость числа от числа, то функционал $I[y(x)]$ - это зависимость числа от функции, он определен на множестве допустимых кривых.

Чтобы проследить изменение функционала при изменении аргумента вводится, прежде всего, понятие вариации функции - аргумента функционала.

Варьирование аргумента функционала означает переход от одной функции из класса допустимых для данного функционала к другой бесконечно близкой ей функции при том же значении x.

В этом состоит отличие варьирования от дифференцирования функций, которое, как известно, является мерой изменения одной и той же функции при изменении независимой переменной x.

Варьирование аргумента функционала δy аналогично приращению независимой переменной Δx при исследовании экстремумов функций.

Варьирование аргумента функционала – это новая математическая операция, перестановочная с операциями дифференцирования и интегрирования.

Аналогично, вариация функционала играет ту же роль при исследовании функционалов, что дифференциал функции при исследовании функций. Вариация функционала – это главная линейная часть приращения функционала.

При исследовании локального экстремума функционала выясняется, что необходимое условие экстремума функционала состоит в равенстве нулю его вариации $\delta I = 0$. Здесь опять проявляется аналогия с исследованием экстремумов функций. Действительно, необходимое условие экстремума функции в данной точке состоит в равенстве нулю производной функции в этой точке: $y'(x_0) = 0.$

Необходимо обязательно осмыслить и знать постановку и решение простейшей вариационной задачи – задачи с неподвижными границами, решение которой сводится к

решению краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка – уравнения Эйлера, играющего фундаментальную роль в вариационном исчислении.

Вторая часть курса связана с разного рода обобщениями простейшей вариационной задачи. Это задачи отыскания экстремумов функционалов, содержащих несколько функций, функционалов, зависящих от производных высшего порядка, функционалов, зависящих от функций нескольких независимых переменных, а также вариационная задача со свободными концами и вариационная задачу с подвижными границами.

Надо четко представлять общность и различия в постановках задач, уметь составлять уравнения Эйлера – Пуассона, Эйлера – Остроградского. Решение этих уравнений и, конечно, уравнения Эйлера при соответствующих краевых условиях требует от студента умения решать дифференциальные уравнения различного типа.

При решении вариационной задачи с подвижными границами надо понимать геометрический смысл условий трансверсальности: последние устанавливают связь между угловыми коэффициентами касательных к заданным кривым и экстремали в граничных точках экстремали.

Важными для приложений являются вариационные задачи на условный экстремум - задачи, в которых требуется найти экстремум функционала, определенного на классе допустимых функций, на которые, кроме граничных условий, наложены некоторые дополнительные условия (связи). Следует при этом освоить технику применения метода неопределённых множителей Лагранжа.

Во многих случаях задачу интегрирования дифференциального уравнения при соответствующих краевых условиях можно заменить равносильной вариационной задачей отыскания функции, сообщающей экстремальное значение некоторому функционалу.

Например, при обычных краевых условиях можно свести интегрирование уравнений статической теории упругости к отысканию минимума потенциальной энергии деформации.

Вариационные задачи допускают их прямое решение, то есть приближенное решение, сводящее исходные уравнения непосредственно к конечным системам алгебраических уравнений. Такие методы и называются прямыми. Их применение связано с использованием общих вариационных принципов механики. В задачах механики деформируемого твердого тела прямые методы решения базируются на аппроксимации деформированного или напряженного состояния.

Наиболее универсальными и распространенными прямыми методами приближенного решения основной задачи вариационного исчисления – задачи отыскания экстремума функционалов являются метод Ритца и метод Бубнова – Галеркина. Студенту следует обязательно разобраться в применении этих методов к решению задачи из расчетно – графической работы об изгибе стержня при различных граничных условиях, так как они и сейчас (спустя более 100 лет после их появления) являются весьма распространенными «рабочими» методами механики.

Студент в процессе освоения курса должен овладеть знанием вариационных методов и принципов и уметь применять их к решению простейших типовых задач, относящихся к прикладной механике.

7. Фонд оценочных средств

Фонд оценочных средств представлен в Приложении 2 к рабочей программе и включает разделы:

1. Методы контроля и оценивания результатов обучения.
2. Шкала и критерии оценивания результатов обучения.
3. Оценочные средства.
3.1. Текущий контроль.
3.2. Промежуточная аттестация.

Приложение 1

Структура и содержание дисциплины
«Основы вариационного исчисления»
по специальности
15.03.03 Прикладная механика
Профиль подготовки
Программирование и цифровые технологии в динамике и прочности
Квалификация - бакалавр
Год набора 2023/2024

n/n	Раздел	Семестр	Неделя Семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов, и трудоемкость в часах					Виды самостоятельной работы Студентов					Формы аттестации	
				Л	П/С	Лаб	СРС	КСР	К.Р.	К.П.	РГР	Реферат	К/р	Э	З
Четвертый семестр															
1.1	**Основные понятия вариационного исчисления.** Постановка задачи о брахистохроне. Понятия линейного и непрерывного функционала, вариации функции (аргумента функционала). Перестановочность операций варьирования и дифференцирования, варьирования и интегрирования. вариации функционала.	4	1	2											
1.2	Понятия вариации функционала, экстремума функционала. Необходимое условие экстремума, основная лемма вариационного исчисления.	4	2		2		2								
1.3	Постановка и решение простейшей	4	3	2											

	вариационной задачи. Уравнение Эйлера. Различные формы записи уравнения Эйлера.						2								
1.4	Различные частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера. Решение задачи о линии наискорейшего ската **Выдача заданий РГР № 1.**	4	4		2		2				+				
1.5	**Раздел 2. Обобщения простейшей вариационной задачи.** Обобщения простейшей вариационной задачи в результате усложнения функционала. Функционал, содержащий несколько функций одной переменной. Функционал, содержащий производные высших порядков. Уравнение Эйлера-Пуассона.	4	5	2			2						+		
1.6	Решение вариационной задачи с неподвижными границами для уравнения Эйлера-Пуассона.	4	6		2		2								
1.7	Дальнейшие обобщения простейшей вариационной задачи Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных. Уравнение Эйлера – Остроградского. Вариационный вывод волнового уравнения.	4	7	2			2				+				
1.8	Вариационная задача со свободными концами.	4	8		2		2						+		
1.9	Вариационная задача с подвижными границами. Условия трансверсальности.	4	9	2			2								
1.10	Примеры вариационной задачи с подвижными границами. Определение координат граничных точек экстремали	4	10		2		2								
1.11	**Раздел 3. Вариационные задачи на**	4	11	2			2								

	условный экстремум. Вариационная задача на условный экстремум с конечными связями. Метод неопределенных множителей Лагранжа.														
1.12	Изопериметрические вариационные задачи на условный экстремум с интегральными связями	4	12		2		2								
1.13	**Раздел 4. Прямые методы вариационного исчисления.** Общность и различие методов. Принцип возможных перемещений Лагранжа. Метод Ритца.	4	13	2			2								
1.14	Прямые методы вариационного исчисления. Метод Ритца. Методические примеры – решение задач об изгибе шарнирно опертой и жестко защемленной балки	4	14		2		2								
1.15	Прямые методы вариационного исчисления. Метод Бубнова – Галеркина Понятие функции-ошибки. Вывод полного вариационного уравнения изгиба балки. Естественные граничные условия	4	15	2			2								
1.16	Метод Бубнова – Галеркина. Методические примеры – решение задач об изгибе шарнирно опертой и жестко защемленной балки	4	16		2		2								
1.17	Обзорная лекция	4	17	2			2								
1.18	Контрольное тестирование	4	18		2		2						+		
	Форма аттестации		**19-21**												**З**
	Всего часов по дисциплине в четвертом семестре			**18**	**18**		**36**				**2 РГР**		**2 сам. раб.**		

Приложение 2

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ

«Основы вариационного исчисления»

Направление подготовки: 15.03.03 «Прикладная механика».
Профиль: «Программирование и цифровые технологии в динамике и прочности».
Форма обучения: очная.

Кафедра: «Математика»

1. Методы контроля и оценивания результатов обучения

Для контроля успеваемости и качества освоения дисциплины настоящей программой предусмотрены следующие виды контроля:

- контроль текущей успеваемости (текущий контроль);
- промежуточная аттестация (экзамен).

2. Шкала и критерии оценивания результатов обучения

Форма промежуточной аттестации: зачет

Промежуточная аттестация обучающихся в форме зачета проводится по результатам выполнения всех видов учебной работы, предусмотренных учебным планом по данной дисциплине, при этом учитываются результаты текущего контроля успеваемости в течение семестра. Оценка степени достижения обучающимися планируемых результатов обучения по дисциплине проводится преподавателем, ведущим занятия по дисциплине методом экспертной оценки. По итогам промежуточной аттестации по дисциплине выставляется оценка «зачтено» или «не зачтено».

Шкала оценивания	**Описание**
Зачтено	Выполнены все **обязательные условия подготовки студента к промежуточной аттестации**, предусмотренные программой дисциплины. Студент демонстрирует соответствие знаний, умений, навыков приведенным в таблицах показателей, оперирует приобретенными знаниями, умениями, навыками, применяет их в ситуациях повышенной сложности. При этом могут быть допущены незначительные ошибки, неточности, затруднения при аналитических операциях, переносе знаний и умений на новые, нестандартные ситуации.
Не зачтено	Не выполнены **обязательные условия подготовки студента к промежуточной аттестации**, *предусмотренные программой дисциплины*, ИЛИ студент демонстрирует неполное соответствие знаний, умений, навыков приведенным в таблицах показателей, допускаются значительные ошибки, проявляется отсутствие знаний, умений, навыков по ряду показателей, студент испытывает значительные затруднения при

	оперировании знаниями и умениями при их переносе на новые ситуации.

3. Оценочные средства

№ п/п	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в ФОС
1	Контрольная (самостоятельная) работа (КР)	Средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу	Контрольные задания
2	Расчетно-графическая работа (РГР)	Средство проверки умений применять полученные знания по заранее определенной методике для решения задач или заданий по модулю или дисциплине в целом.	Комплект заданий для выполнения расчетно-графической работы
3	Устный опрос собеседование, (УО)	Средство контроля, организованное как специальная беседа педагогического работника с обучающимся на темы, связанные с изучаемой дисциплиной, и рассчитанное на выяснение объема знаний обучающегося по определенному разделу, теме, проблеме и т.п.	Вопросы по темам/разделам дисциплины
4	Тест (Т)	Система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающегося.	Вариант теста
5	Билеты к зачету (БкЗ)	Средство проверки знаний, умений, навыков. Может включать комплекс теоретических вопросов, задач, практических заданий.	Билеты к зачету

3.1. Текущий контроль

Оценочные средства текущего контроля успеваемости включают контрольные вопросы и задания в форме бланкового тестирования для контроля освоения обучающимися разделов дисциплины, прием РГР.

Содержание расчетно-графических работ.

Расчетно-графическая работа № 1. Функционалы, зависящие от функции одной переменной.

Краткое содержание и этапы расчетно-графической работы:
определение вариации функционала; нахождение экстремали функционала; нахождение экстремали функционала, удовлетворяющей граничным условиям; вариационная задача со свободными концами; вариационная задача на условный экстремум.

Расчётно-графическая работа №2. Функционалы с производными высших порядков.
Краткое содержание и этапы расчетно-графической работы:
нахождение семейства экстремалей функционала; нахождение экстремали функционала, содержащего производные высших порядков, удовлетворяющей граничным условиям; задача со свободными концами, задача с подвижными границами, задача на условный экстремум, решение задачи об изгибе стержня методами Бубнова - Галеркина и Ритца.

Комплект заданий для выполнения расчетно-графических работ (РГР)

ЗАДАНИЕ 1.

Найти вариацию функционала $I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx.$

№ варианта	$F(x, y, y')$	№ варианта	$F(x, y, y')$
1	$16y^2 - y'^2 - -2y \cdot \sin x$	4	$2x^3y' - y'^2(x+1)$
2	$xy + y^2 - 2y^2y'$	5	$xy'^2 - y^2/x$
3	$y^2 + 2xyy'$	6	$y'^2 - y^2 - e^x y$

ЗАДАНИЕ 2.

Найти экстремаль функционала $I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx,$

удовлетворяющую граничным условиям $y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1.$

№ варианта	$F(x, y, y')$	x_0	y_0	x_1	y_1
1	2	3	4	5	6
1	$xy' + y'^2$	0	0	2	3
	$16y^2 - y'^2 + 32xy$	0	0	$\pi/8$	0
2	$y'^2 + 4yy' - 4y^2$	$\pi/6$	0	$\pi/3$	1
	$y^2 + y'^2 + 2ye^x$	0	0	1	E
3	$x^2y'^2 + 12y^2$	1	1	2	1
	$16y^2 - y'^2 - 2y \cdot \sin 4x$	0	0	$\pi/8$	0

ЗАДАНИЕ 3.

Найти экстремаль функционала

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F\left[x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)\right]dx,$$

удовлетворяющую граничным условиям

$$y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1,\quad z(x_0)=z_0,\quad z(x_1)=z_1.$$

№ вари-анта	$F[x,y(x),y'(x),z(x),z'(x)]$	x_0	y_0	z_0	x_1	y_1	z_1
1	$y'^2+z'^2+2yz$	0	0	0	$\pi/2$	1	-1
2	$y'^2-z'^2-z^2$	0	1	1	2	3	3
3	$3x^2y-8x^2z+y'z'$	0	0	0	2	1	3
4	$y'z'+6xy+12x^2z$	0	0	0	1	1	1
5	$y'z'-yz$	0	0	0	$\pi/2$	1	1

ЗАДАНИЕ 4.
Найти семейство экстремалей функционала

$$I=\int_{x_0}^{x_1}F\left[x,y(x),y'(x),y''(x),...,y^{(n)}(x)\right]dx.$$

№ Варианта	F
1	$y'''^2-4y''^2+60xy+16y+xe^{-x}$
2	$4y^2-2xy+5y'^2+y''^2$
3	$y'''^2+4y''^2+120xy+64y+xe^{-2x}$
4	$y''^2+2y'^2+0{,}5y^2-xyy'+ye^{-x}$
5	$240y-y'''^2$

ЗАДАНИЕ 5.

Найти экстремаль функционала $I=\int_{x_0}^{x_1}F\left[x,y(x),y'(x),...,y^{(n)}(x)\right]dx$,

удовлетворяющую граничным условиям: $y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0',...,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},$
$y(x_1)=y_1,\quad y'(x_1)=y_1',...,y^{(n-1)}(x_1)=y_1^{(n-1)}.$

№ вари-анта	F	Граничные условия
1	$y''^2-2y'^2+y^2$	$y(0)=0,\quad y'(0)=0,\quad y(\pi)=0,\quad y'(\pi)=1$
2	$y''^2+y'^2-ye^{3x}$	$y(0)=y'(0)=0,\quad y(1)=0,\quad y'(1)=1$
3	$y''^2+9y'^2-2y(\cos x+$ $+\sin x)$	$y(0)=y'(0)=0,\quad y(2\pi)=y(2\pi)=1$

4	$y''^2 - 16y'^2 - 2y\cdot\sin x$	$y(0) = y'(0) = 0,\ \ y(\pi/4) = y'(\pi/4) = 0$
5	$y''^2 - y^2 - 2e^{2x}y$	$y(0) = y'(0) = y(\pi/2) = 0, \quad y'(\pi/2) = 1$

ЗАДАНИЕ 6.

Решить вариационную задачу со свободными концами

для функционала $I = \int_{x_0}^{x_1} F[x, y(x), y'(x)]dx$.

№ варианта	F	Уравнения вертикалей
1	$y'^2 - 4y^2 - 5y\cdot\cos x$	$x = 0, \quad x = \pi/6$
2	$y'^2 - 4y^2 + 2y\cdot\sin 3x$	$x = 0, \quad x = \pi/4$
3	$y'^2 - y^2 + 4y\cdot\cos 2x$	$x = \pi/2, \quad x = \pi$
4	$y'^2 - 16y^2 + 2y\cdot e^{-x}$	$x = 0, \quad x = \pi/8$
5	$4y^2 - y'^2 + 8xy$	$x = \pi/6, \quad x = \pi/3$

Решить вариационную задачу со свободным концом для функционала

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F[x, y(x), y'(x)]dx.$$

№ варианта	F	Граничное условие	Уравнение вертикали
6	$y'^2 - 4yy' + 8yx^2 - 4y^2$	$y(0) = 0$	$x = \pi$
7	$y'^2 - e^{2x}y' - 4y^2$	$y(0) = 1$	$x = \pi$
8	$y'^2 - 4x^4y' - 8xy$	$y(0) = 0$	$x = 1$
9	$y^2 - y'^2 - 2y\cdot\cos x$	$y(0) = 1$	$x = \pi/4$
10	$y^2 - y'^2 + 4y\cdot\sin 2x$	$y(0) = 1$	$x = \pi$

ЗАДАНИЕ 7.

Решить вариационную задачу с подвижными границами:

1). Найти кратчайшее расстояние между параболой и прямой:

№ варианта	Уравнение параболы	Уравнение прямой
1	$y = x^2 + 1$	$y = 2x - 4$
2	$y = x^2 - 1$	$y = -x - 4$
3	$y = -x^2$	$y = 3 - x$

4	$y = 2 - x^2$	$y = x + 6$
5	$y = x^2 + 2$	$y = x$

2). Найти кратчайшее расстояние между окружностью и прямой:

№ варианта	Уравнение окружности	Уравнение прямой
6	$x^2 + y^2 = 4$	$y = x + 4$
7	$(x+1)^2 + y^2 = 1$	$y = 2 - x$
8	$x^2 + y^2 = 1$	$y = 4 - x$
9	$x^2 + y^2 = 4$	$y = 2x + 8$

ЗАДАНИЕ 8.

Решить вариационную задачу на условный экстремум:

Найти экстремаль функционала $I = \int_{x_0}^{x_1} F[x, y(x), y'(x)]dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ и интегральной связи $K = \int_{x_0}^{x_1} G[x, y(x), y'(x)]dx$

№ варианта	F	x_0	x_1	y_0	y_1	G	K
1	y'^2	0	π	0	0	y^2	1
2	y'^2	0	π	0	1	$y \cdot \sin x$	0
3	y'^2	0	$\pi/2$	0	$\pi/2$	$y \cdot \sin 2x$	π
4	$y \cdot \sin x$	0	π	0	π	y'^2	$3\pi/2$
5	y'^2	0	1	0	5	xy	1

ЗАДАНИЕ 9.

Решить методом Бубнова задачу об изгибе балки, используя полное вариационное уравнение изгиба балки:

$$\int_0^l (EIy^{IV} - q)\delta y dx + M\delta y' \Big|_0^l - Q\delta y \Big|_0^l = 0,$$

где $y(x)$, $M(x)$, $Q(x)$ – соответственно прогиб, изгибающий момент и поперечная сила в произвольном поперечном сечении балки с абсциссой x; EI – изгибная жесткость балки, $q(x)$ – поперечная распределенная нагрузка, равная

$$q(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & при \quad 0 \le x < l/4, \\ \varphi_2(x) & при \quad l/4 \le x < l/2, \\ \varphi_3(x) & при \quad l/2 \le x \le l. \end{cases}$$

Выражения для функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ указаны в таблице:

№ варианта	Граничные Условия	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$
1	$y(0)=y''(0)=0$, $y(l)=y''(l)=0$	q_0	$2q_0$	$q_0(1-x/l)$
2		0	$q_0 x/l$	q_0
3		$q_0 x/l$	q_0	0
4		q_0	$q_0(1-x/l)$	0
5		0	$q_0(1-x/l)$	$2\,q_0$

ЗАДАНИЕ 10.

Решить методом Ритца в двучленном приближении задачу об изгибе балки, используя выражение для полной потенциальной энергии балки при изгибе:

$$Э = \int_0^l \left(\frac{EI}{2} y''^2 - qy \right) dx,$$

где EI - изгибная жесткость балки, $y(x)$ - прогиб в произвольном поперечном сечении балки с абсциссой x, $q(x)$ - поперечная распределенная нагрузка, определяемая в соответствии с таблицей из задания 9.

Комплект тестовых заданий

В А Р И А Н Т № 1

ЗАДАНИЕ 1

Найти вариацию функционала $I = \int_{x_0}^{x_1} [2x^3 y' + y'^2 (x-1)] dx$.

Ответ	

ЗАДАНИЕ 2

Составить уравнение Эйлера для функционала

$$I = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 4y' \cos 2x - 2y \sin 3x) dx.$$

Ответ	

ЗАДАНИЕ 3

Найти семейство экстремалей функционала $I = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 - 4y^2 + 2xy) dx$.

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 0{,}25x$ 2) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + 0{,}25x$

3) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - 0{,}25x$ 4) $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + 0{,}25x$.

ЗАДАНИЕ 4

Найти решение вариационной задачи с неподвижными границами для функционала

$$I=\int_0^1 (y'^2-2ye^x)dx, \qquad y(0)=0, \quad y(1)=0.$$

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ: 1) $y=-e^x+(e-1)x$ 2) $y=-e^x+ex+1$

3) $y=-e^x+(e-1)x+1$ 4) $y=e^x+(1-e)x-1$.

ЗАДАНИЕ 5

Составить уравнения Эйлера для функционала

$$I=\int_{x_0}^{x_1} (z'^2+4xz-2yx^2-y'^2)dx.$$

Ответ	

ЗАДАНИЕ 6

Составить уравнение Эйлера - Пуассона для функционала

$$I=\int_{x_0}^{x_1} (y''^2-2y'^2+y^2-2ye^x)dx.$$

Ответ	

ЗАДАНИЕ 7

Найти семейство экстремалей функционала $I=\int_{x_0}^{x_1} (y''^2-16y^2)dx.$

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ: 1) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3xe^{2x}+C_4xe^{-2x}$

2) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$

3) $y=C_1e^{\sqrt{2}x}\cos\sqrt{2}x+C_2e^{\sqrt{2}x}\sin\sqrt{2}x+C_3e^{-\sqrt{2}x}\cos\sqrt{2}x+C_4e^{-\sqrt{2}x}\sin\sqrt{2}x$

4) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+C_3x\cos 2x+C_4x\sin 2x$.

ЗАДАНИЕ 8

Найти решение вариационной задачи со свободным концом для функционала

$$I=\int_0^{\pi} (y'^2-2y'+2y\sin x)dx, \qquad y(0)=0, \quad x=\pi.$$

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y=\sin x$ 2) $y=-\sin x+x/\pi$ 3) $y=-\sin x$ 4) $y=-\sin x+2x$.

ЗАДАНИЕ 9

Для вариационной задачи с подвижными границами составить условия трансверсальности, если семейство экстремалей функционала

$I=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}dx$ имеет вид $y=C_1x+C_2$, а уравнения заданных кривых:

$\varphi(x)=x^2+3, \quad \psi(x)=x-3.$

Ответ	

ЗАДАНИЕ 10

Для вариационной задачи на условный экстремум для функционала $I = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 - 9y^2)dx$ при наличии интегральной связи $K = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 - 2x)dx$ составить расширенный функционал.

Ответ	

Критерии оценки:
- оценка «зачтено» выставляется студенту, если он регулярно в течение семестра представлял решения задач, выполнил полностью все задания и их защитил, ответив на вопросы преподавателя;
- оценка «не зачтено» выставляется студенту, если он нерегулярно в течение семестра представлял решения задач, выполнил задания не полностью или вообще не представлял работы на проверку, допускает существенные неточности в ответах на вопросы преподавателя.

Для проведения текущего контроля знаний студентов в дистанционном формате в разработанном кафедрой «Математика» онлайн-курсе имеются промежуточные контрольные работы.

3.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация - (зачет) проводится по билетам в устной форме.
Время для подготовки ответа на вопросы не более 45 мин.
Билет включает теоретический вопрос и задачи.
Комплекты экзаменационных билетов хранятся на кафедре «Математика».
Типовые варианты билетов прилагаются.

Комплект вопросов

1. Дайте определение понятия функционала.
2. Дайте определение понятия вариации функции. В чем его отличие от понятия дифференциала функции?
3. В чем заключается перестановочность операций варьирования и дифференцирования, варьирования и интегрирования.
4. Понятие непрерывности и линейности функционала.
5. Понятие вариации функционала. В чем особенность техники варьирования?
6. Формула для вычисления вариации функционала $I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx.$
7. Понятия абсолютного и локального экстремумов функционала.
8. Основная лемма вариационного исчисления. Необходимое условие экстремума.
9. Постановка простейшей вариационной задачи для функционала $I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx.$

   Уравнение Эйлера. Понятие экстремали.
10. Различные формы записи уравнения Эйлера.

11. Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера для функционалов: $I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y)dx,$

$I = \int_{x_0}^{x_1} F(y')dx, \quad I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y')dx, \quad I = \int_{x_0}^{x_1} F(y, y')dx.$

12. Постановка задачи о брахистохроне. Запишите уравнение линии наискорейшего ската.
13. Задача о наименьшей площади поверхности тела вращения. Запишите уравнение цепной линии.
14. Задача с неподвижными границами для функционала, зависящего от нескольких функций $I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', z, z', ...)dx.$
15. Задача с неподвижными границами для функционала, содержащего производные до *n*-го порядка включительно $I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)})dx.$
16. Уравнение Эйлера-Пуассона для функционала $I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'')dx$ и в общем случае для функционала $I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)})dx.$
17. Функционал, содержащий функции нескольких переменных. Уравнение Эйлера-Остроградского.
18. Постановка задачи со свободными концами для функционала $I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx.$
19. Какой вид имеют граничные условия в вариационной задаче со свободными концами для функционала $I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$?
20. Постановка задачи с подвижными границами для функционала $I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx.$ Условия трансверсальности.
21. Смысл условий трансверсальности для функционалов $I = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y)\sqrt{1 + y'^2})\,dx.$
22. Постановка вариационной задачи на условный экстремум.
23. Метод неопределенных множителей Лагранжа.
24. Прямые методы вариационного исчисления. Метод Ритца.
25. Прямые методы вариационного исчисления. Метод Бубнова-Галеркина.

Типовые варианты билетов

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХ)

Факультет базовых компетенций, кафедра математики
Дисциплина «Основы вариационного исчисления»
Образовательная программа 15.03.03 – Прикладная механика
Курс 2, семестр 4

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

1. Понятие вариации функции. Перестановочность операций варьирования и дифференцирования, варьирования и интегрирования.
2. Найти семейство экстремалей функционала $\int\limits_{x_0}^{x_1}(y''^2+9y'^2-2y\cos x)dx$.
3. Решить вариационную задачу со свободными концами для функционала:

$$\int\limits_{\pi/2}^{\pi}(y'^2-y^2+4y\cos 2x)dx, \qquad x=\pi/2, \quad x=\pi.$$

Утверждено на заседании кафедры математики «03» 05 2023 г., протокол № 10

И.о. зав. кафедрой Н.В. Васильева /_____/

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХ)

Факультет базовых компетенций, кафедра математики
Дисциплина «Основы вариационного исчисления»
Образовательная программа 15.03.03 – Прикладная механика
Курс 2, семестр 4

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 2

1. Понятие вариации функционала.
2. Найти экстремаль функционала $\int\limits_{0}^{1}(y''^2-48y)dx,$ удовлетворяющую граничным условиям: $y(0)=1, \quad y'(0)=-4, \quad y(1)=0, \quad y'(1)=0.$
3. Найти семейство экстремалей функционала $\int\limits_{x_0}^{x_1}(y'''^2-y''^2-2ye^x)dx.$

Утверждено на заседании кафедры математики «03» 05 2023 г., протокол № 10

И.о. зав. кафедрой Н.В. Васильева /_____/

Для проведения промежуточного контроля знаний студентов в дистанционном формате в разработанном кафедрой «Математика» онлайн-курсе «Основы вариационного исчисления имеются итоговые тесты.