Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Максимов Алексей Борисович
Должность: директор департамента по образовательной политике
Дата подписания: 18.09.2025 14:09:30
Уникальный программный ключ:
8db180d1a3f02ac9e60521a5672742735c18b1d6

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХ)

Транспортный факультет

УТВЕРЖДАЮ
И.о. декана
_____ /М.Р. Рыбакова/
«27» февраля 2025г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Метод конечных элементов

Направление подготовки/специальность
23.03.02 Наземные транспортно-технологические комплексы

Профиль/специализация
Гоночные автомобили и мотоциклы

Квалификация
бакалавр

Формы обучения
очная

2025

Разработчик(и):

Профессор, д.т.н.  /О.А. Русанов/

1 Цели и задачи дисциплины

1.1 Цель дисциплины

Целью изучения дисциплины «Метод конечных элементов» является:

– формирование знаний о современных численных алгоритмах, методах моделирования и инженерного исследования конструкций автомобилей и тракторов для анализа напряженно-деформированного и термического состояний их деталей и узлов, освоение предназначенного для этого универсального программного обеспечения, реализующего метод конечных элементов;

- подготовка студентов к деятельности в соответствии с квалификационной характеристикой специалиста по направлению 23.03.02 Наземные транспортно-технологические комплексы (уровень бакалавриата), профиль: "Гоночные автомобили и мотоциклы".

1.2 Задачи дисциплины

Задачами дисциплины «Метод конечных элементов» являются:

- ознакомление студентов с широко применяемыми методами вычислительной механики и современным программным комплексом, реализующим метод конечных элементов для расчета напряженно-деформированного и теплового состояний деталей и узлов автомобилей и тракторов.

– изучение эффективных и высокопроизводительных численных алгоритмов, используемых в современных вычислительных комплексах метода конечных элементов для анализа напряженно-деформированного состояния машин.

- знакомство с основами расчетного моделирования конструкций мобильных машин с использованием одной из универсальных программ метода конечных элементов и одной из универсальных программ трехмерного автоматизированного проектирования.

2 Место дисциплины в структуре основных образовательных программ

Дисциплина «Метод конечных элементов» относится к обязательной части (Б1.1.19) профессионального цикла основных образовательных программ (ООП) по направлению подготовки специалиста по направлению 23.03.02 Наземные транспортно-технологические комплексы (уровень бакалавриата), профиль: "Гоночные автомобили и мотоциклы".

Предшествующими курсами, на которых базируется дисциплина «Метод конечных элементов» являются:

- линейная алгебра, математический анализ);
- основы механики;
- основы материаловедения и сопротивления материалов;
- аналитическая динамика и теория колебаний;
- численные методы;

3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен обладать следующими компетенциями:

Код компетенции	В результате освоения образовательной программы обучающийся должен обладать	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине
ОПК-2	Способен использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач	**знать:** • направления развития вычислительных методов в механике и эффективные вычислительные алгоритмы, применяемые в современном программном обеспечении для решения прикладных задач анализа напряженно деформированного и теплового состояний конструкций автомобилей и тракторов. **уметь:** • использовать современное программное обеспечение для расчетного анализа напряженно деформированного и теплового состояний деталей и узлов автомобилей и тракторов. **владеть:** • навыками использования одной из современных вычислительных программ, реализующей метод конечных элементов, для расчета напряженно деформированного и теплового состояний деталей и узлов автомобилей и тракторов .
ОПК-3	Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности	**знать:** • возможности современного программного обеспечения метода конечных элементов для решения инженерных задач при производстве, модернизации и ремонте транспортно-технологических средств, их технологического оборудования и комплексов на их базе . **уметь:** • пользоваться возможностями, предоставляемыми современным программным обеспечением метода конечных элементов для проведения теоретических научных исследований при решении инженерных задач, возникающих при производстве, модернизации и ремонте транспортно-технологических средств, их технологического оборудования и

		комплексов на их базе . **владеть:** • приемами обработки данных и эффективными алгоритмами интерпретации результатов компьютерного анализа напряженно-деформированного и теплового состояний деталей и узлов машин.

4 Структура и содержание дисциплины

Дисциплина читается на третьем и четвертом курсах в **пятом, шестом и седьмом** семестрах. Проводятся лекции, семинары, лабораторные занятия, форма контроля – экзамены. Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы (108 академических часов - 7 семестр).

Вид учебной работы	**Всего часов**	**Семестр**
		7
Общая трудоемкость	108 (3 з.е.)	108 (3 з.е.)
Аудиторные занятия (всего)	54	54
В том числе		
лекции	36	36
Практические занятия	18	18
Лабораторные занятия	нет	нет
Самостоятельная работа студента	54	54
Курсовая работа	нет	нет
Курсовой проект	нет	нет
Вид промежуточной аттестации		Зачет

Структура и содержание дисциплины «Метод конечных элементов» по срокам и видам работы отражены в Приложении 1.

Содержание разделов дисциплины.

Тема 1. Введение.

Роль расчетных методов и метода конечных элементов, в частности, при проектировании и доводке автомобилей и тракторов для анализа напряженно-

деформированного и термического состояний деталей и узлов для обеспечения их прочности. Обзор задач, решаемых методом конечных элементов.

Современное программное обеспечение, реализующее метод конечных элементов, для анализа напряженно-деформированного и термического состояний деталей и узлов автомобилей и тракторов. Структура программного обеспечения метода конечных элементов.

Обзор эффективных и производительных численных алгоритмов, реализуемых в программных комплексах для решения задач вычислительной механики. Основные вычислительные затраты при решении задач методом конечных элементов.

Сравнительный анализ различных расчетных подходов в задачах обеспечения прочности конструкций автомобилей и тракторов. Демонстрация результатов расчетных исследований методом конечных конструкций машин. Проблемы выбора расчетной схемы. Характеристики расчетных моделей: точность, адекватность и экономичность.

Тема 2. Сведения из математики и механики деформируемого твердого тела.

Элементы матричной алгебры и вариационного исчисления.

Перемещения, деформации, напряжения. Связь между напряжениями и деформациями. Уравнения равновесия. Граничные условия. Общие схемы решения задач механики конструкций. Принцип минимума потенциальной энергии.

Тема 3. Метод конечных элементов как вычислительный метод решения задач механики.

Основные понятия метода конечных элементов (МКЭ). Обзор типов конечных элементов. Особенности расчета конструкций с использованием МКЭ. Структура современного программного обеспечения МКЭ.

Способы вывода соотношений метода конечных элементов (МКЭ). Прямой метод получения конечно-элементных соотношений. Стержневой конечный элемент. Формирование глобальной матрицы жесткости конструкции из матриц жесткости отдельных элементов (на примере стержневой задачи).

Вариационные принципы - основа формирования разрешающих уравнений МКЭ. Вывод матричных уравнений МКЭ на основе принципа минимума потенциальной энергии. Основные матрицы МКЭ - жесткости, масс и др.. Векторы нагрузок от внешних сил. Учет начальных деформаций, предварительных напряжений. Распределенные нагрузки в конечно-элементных моделях. Приведение распределенных нагрузок к узлам конечно-элементной модели.

Аппроксимация неизвестных в МКЭ. Функции формы конечных элементов. Классы применяемых функций. Свойства функций формы. Требования к функциям формы. Точность решений МКЭ в зависимости от выбора функций формы.

Балочный конечный элемент. Функции формы балочного конечного элемента. Полиномы Эрмита как функции формы балочного элемента. Способы формирования соотношений метода конечных элементов в различных координатных системах.

Численное интегрирование при вычислении коэффициентов матриц жесткости, масс и других матриц в МКЭ. Квадратурные формулы Гаусса – Лежандра.

Тема 4. Метод конечных элементов задаче плоского напряженного, плоского деформированного состояний

Треугольный конечный элемент для решения плоской задачи теории упругости. Треугольные L-координаты площади. Использование L-координат для построения функций формы плоского треугольного конечного элемента. Связь L-координат с физическими (декартовыми) координатами треугольного конечного элемента. Дифференцирование L-координат по физическим (декартовым) координатам элемента. Матрица жесткости плоского треугольного конечного элемента.

Тема 5. Теория изопараметрических конечных элементов

Функции формы изопараметрических конечных элементов. Изопараметрические конечные элементы Лагранжева и Серендипова семейств. Субпараметрические, изопараметрические, суперпараметрические конечные элементы. Естественные координаты изопараметрических элементов, их связь с физическими координатами. Дифференцирование по физическим координатам функций формы явно выраженных через естественные координаты. Четырехугольный билинейный изопараметрический конечный элемент плоского напряженного состояния. Объемный восьмиузловой шестигранный изопараметрический конечный элемент для моделирования трехмерного напряженно-деформированного состояния.

Базисные функции конечных элементов иерархического типа. Преимущества решения задач с использованием элементов на основе функций формы иерархического типа.

Тема 6. Модели метода конечных элементов для расчета пластин и оболочек

Конечные элементы для расчета изгиба пластин. Функции формы элементов. Совместность элементов. Комбинирование с элементами расчета плоского напряженного состояния для создания элементов оболочки общего положения. Конечные элементы тонкой осесимметричной оболочки.

Тема 7. Моделирование теплопроводности методом конечных элементов

Уравнение теплопроводности. Граничные условия для уравнения теплопроводности Учет граничных условий первого, второго и третьего рода. Стационарная теплопроводность. Уравнения Лапласа, Пуассона. Формулировка метода конечных элементов для решения уравнения теплопроводности на основе метода Бубнова-Галеркина. Учет граничных условий в задаче теплопроводности.

Решение задачи нестационарной теплопроводности методом конечных элементов. Явная и неявная схемы треугольника, схема интегрирования Кранка-Николсона.

Тема 8. Эффективные численные алгоритмы, используемые в современном программном обеспечении метода конечных элементов

Свойства матриц систем линейных алгебраических уравнений при моделировании МКЭ. Алгоритмы решения систем больших систем линейных алгебраических уравнений с симметричными разреженными матрицами. Метод LDL^T для решения систем линейных алгебраических уравнений в МКЭ. Область применимости метода LDL^T. Итерационные методы решения сверхбольших систем МКЭ. Метод сопряженных градиентов. Ускорение прямых и итерационных методов за счет специальных процедур нумерации узлов конечно-элементных моделей.

Способы хранения разреженных матриц в МКЭ. Заполнение разреженных матриц МКЭ при решении систем уравнений прямыми методами. Методы экономии памяти и повышения скорости решения МКЭ. Представление с помощью теории графов процесса исключения степеней свободы. Алгоритмы выбора оптимального порядка исключения Коллинза, Катхилла-Макки, параллельных и вложенных сечений.

Возможности параллельного решения задач методом конечных элементов. Обзор численных алгоритмов параллельного решения систем алгебраических уравнений МКЭ на многоядерных и многопроцессорных вычислительных системах.

Тема 9. Пути повышения точности расчетного анализа конструкций автомобилей и тракторов, выполняемого методом конечных элементов

Основные приемы и способы моделирования деталей, узлов и конструкций автомобилей и тракторов методом конечных элементов. Особенности расчетных схем и конечно-элементных моделей деталей, узлов и конструкций автомобилей и тракторов. Преимущества и недостатки различных расчетных подходов при выполнении исследований конструкций автомобилей и тракторов численными методами. Погрешности, возникающие при расчетах методом конечных элементов конструкций машин. Пути повышения точности выполняемого методом конечных элементов расчетного анализа напряженно-деформированного состояния конструкций машин.

5. Образовательные технологии

Методика преподавания дисциплины «Метод конечных элементов» и реализация компетентностного подхода в изложении и восприятии материала предусматривает использование следующих активных форм проведения групповых, индивидуальных, аудиторных занятий в сочетании с внеаудиторной работой с целью формирования и развития профессиональных навыков обучающихся:

– подготовка к выполнению практических работ в лабораториях вуза;

– подготовка, представление и обсуждение презентаций на семинарских занятиях;

– организация и проведение текущего контроля знаний студентов в форме бланкового тестирования;

– проведение мастер-классов экспертов и специалистов в области численных методов и прикладной механики.

6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

В процессе обучения используются следующие оценочные формы самостоятельной работы студентов, оценочные средства текущего контроля успеваемости и промежуточных аттестаций:

- подготовка к выполнению лабораторных работ и их защита.

Оценочные средства текущего контроля успеваемости включают контрольные вопросы и задания в форме бланкового и (или) компьютерного тестирования, для контроля освоения обучающимися разделов дисциплины.

Образцы тестовых заданий, заданий курсовых проектов, контрольных вопросов и заданий для проведения текущего контроля, экзаменационных билетов, приведены в приложении 4.

6.1. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю).

6.1.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.

В результате освоения дисциплины (модуля) формируются следующие компетенции:

Код компетенции	В результате освоения образовательной программы обучающийся должен обладать
ОПК-2	Способен использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач
ОПК-3	Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности

В процессе освоения образовательной программы данные компетенции, в том числе их отдельные компоненты, формируются поэтапно в ходе освоения

обучающимися дисциплин (модулей), практик в соответствии с учебным планом и календарным графиком учебного процесса.

6.1.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций, формируемых по итогам освоения дисциплины (модуля), описание шкал оценивания.

Показателем оценивания компетенций на различных этапах их формирования является достижение обучающимися планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю).

ОПК-2. Способность к самообразованию и использованию в практической деятельности новых знаний и умений, в том числе в областях знаний, непосредственно не связанных со сферой профессиональной деятельности.

Показатель	Критерии оценивания			
	2	3	4	5
знать: направления развития вычислительных методов в механике и эффективные вычислительные алгоритмы, применяемые в современном программном обеспечении для решения прикладных задач анализа напряженно деформированного и теплового состояний конструкций автомобилей и тракторов.	Обучающийся демонстрирует полное отсутствие или недостаточное соответствие знаний направлений развития вычислительных методов в механике и эффективных вычислительных алгоритмов, применяемых в современном программном обеспечении для решения прикладных задач анализа напряженно деформированного и теплового состояний конструкций автомобилей и тракторов.	Обучающийся демонстрирует неполные знания направлений развития вычислительных методов в механике и эффективных вычислительных алгоритмов, применяемых в современном программном обеспечении для решения прикладных задач анализа напряженно деформированного и теплового состояний конструкций автомобилей и тракторов. Допускаются значительные ошибки, проявляется недостаточность знаний, по ряду показателей, обучающийся испытывает значительные затруднения при оперировании знаниями при их переносе на новые ситуации.	Обучающийся демонстрирует частичные знания в области направлений развития вычислительных методов в механике и эффективных вычислительных алгоритмов, применяемых в современном программном обеспечении для решения прикладных задач анализа напряженно деформированного и теплового состояний конструкций автомобилей и тракторов., но допускаются незначительные ошибки, неточности, затруднения при аналитических операциях.	Обучающийся демонстрирует полные знания в области направлений развития вычислительных методов в механике и эффективные вычислительных алгоритмов, применяемых в современном программном обеспечении для решения прикладных задач анализа напряженно деформированного и теплового состояний конструкций автомобилей и тракторов, свободно оперирует приобре-тенными знаниями.

уметь: использовать современное программное обеспечение для расчетного анализа напряженно деформированного и теплового состояний деталей и узлов автомобилей и тракторов.	Обучающийся не умеет или в недостаточной степени умеет: использовать современное программное обеспечение для расчетного анализа напряженно деформированного и теплового состояний деталей и узлов автомобилей и тракторов.	Обучающийся демонстрирует неполное соответствие следующих умений: использовать современное программное обеспечение для расчетного анализа напряженно деформированного и теплового состояний деталей и узлов автомобилей и тракторов. Допускаются значительные ошибки, проявляется недостаточность владения навыками по ряду показателей, Обучающийся испытывает значительные затруднения при применении навыков в новых ситуациях.	Обучающийся демонстрирует частичное соответствие следующих умений: использовать современное программное обеспечение для расчетного анализа напряженно деформированного и теплового состояний деталей и узлов автомобилей и тракторов. Умения освоены, но допускаются незначительные ошибки, неточности, затруднения при переносе умений на новые, нестандартные ситуации.	Обучающийся демонстрирует полное соответствие следующих умений: использовать современное программное обеспечение для расчетного анализа напряженно деформированного и теплового состояний деталей и узлов автомобилей и тракторов. Свободно оперирует приобретенным и умениями, применяет их в ситуациях повышенной сложности.
владеть: навыками использования одной из современных вычислительных программ, реализующей метод конечных элементов, для расчета напряженно деформированного и теплового состояний деталей и узлов автомобилей и тракторов .	Обучающийся не владеет или в недостаточной степени владеет навыками использования одной из современных вычислительных программ, реализующей метод конечных элементов, для расчета напряженно деформированного и теплового состояний деталей и узлов автомобилей и тракторов .	Обучающийся не в полной мере владеет навыками использования одной из современных вычислительных программ, реализующей метод конечных элементов, для расчета напряженно деформированного и теплового состояний деталей и узлов автомобилей и тракторов . Допускаются значительные ошибки, проявляется недостаточность владения навыками по ряду показателей, Обучающийся	Обучающийся частично владеет навыками использования одной из современных вычислительных программ, реализующей метод конечных элементов, для расчета напряженно деформированного и теплового состояний деталей и узлов автомобилей и тракторов . Навыки освоены, но допускаются незначительные ошибки, неточности, затруднения при переносе умений на новые, нестандартные ситуации.	Обучающийся в полном объеме владеет навыками использования одной из современных вычислительных программ, реализующей метод конечных элементов, для расчета напряженно деформированного и теплового состояний деталей и узлов автомобилей и тракторов . Свободно применяет полученные

		испытывает значительные затруднения при применении навыков в новых ситуациях.		навыки в ситуациях повышенной сложности.

ОПК-3. Способность определять способы достижения целей проекта, выявлять приоритеты решения задач при производстве, модернизации и ремонте транспортно-технологических средств, их технологического оборудования и комплексов на их базе.				
Показатель	**Критерии оценивания**			
	2	**3**	**4**	**5**
знать: возможности современного программного обеспечения метода конечных элементов для решения инженерных задач при производстве, модернизации и ремонте транспортно-технологических средств, их технологического оборудования и комплексов на их базе.	Обучающийся демонстрирует полное отсутствие знаний или недостаточное соответствие знаний в области: возможностей современного программного обеспечения метода конечных элементов для решения инженерных задач при производстве, модернизации и ремонте транспортно-технологических средств, их технологического оборудования и комплексов на их базе.	Обучающийся демонстрирует неполные знания в области возможностей современного программного обеспечения метода конечных элементов для решения инженерных задач при производстве, модернизации и ремонте транспортно-технологических средств, их технологического оборудования и комплексов на их базе. Допускаются значительные ошибки, проявляется недостаточность знаний, по ряду показателей, обучающийся испытывает значительные затруднения при оперировании знаниями при их переносе на новые ситуации.	Обучающийся демонстрирует частичные знания в области возможностей современного программного обеспечения метода конечных элементов для решения инженерных задач при производстве, модернизации и ремонте транспортно-технологических средств, их технологического оборудования и комплексов на их базе, но допускаются незначительные ошибки, неточности, затруднения при аналитических операциях.	Обучающийся демонстрирует полные знания в области возможностей современного программного обеспечения метода конечных элементов для решения инженерных задач при производстве, модернизации и ремонте транспортно-технологических средств, их технологического оборудования и комплексов на их базе, свободно оперирует приобре-тенными знаниями.

уметь: пользоваться возможностями, предоставляемым и современным программным обеспечением метода конечных элементов для проведения теоретических научных исследований при решении инженерных задач, возникающих при производстве, модернизации и ремонте транспортно-технологических средств, их технологического оборудования и комплексов на их базе.	Обучающийся не умеет или в недостаточной степени умеет: пользоваться возможностями, предоставляемыми современным программным обеспечением метода конечных элементов для проведения теоретических научных исследований при решении инженерных задач, возникающих при производстве, модернизации и ремонте транспортно-технологических средств, их технологического оборудования и комплексов на их базе.	Обучающийся демонстрирует неполное соответствие следующих умений: пользоваться возможностями, предоставляемыми современным программным обеспечением метода конечных элементов для проведения теоретических научных исследований при решении инженерных задач, возникающих при производстве, модернизации и ремонте транспортно-технологических средств, их технологического оборудования и комплексов на их базе. Допускаются значительные ошибки, проявляется недостаточность владения навыками по ряду показателей, Обучающийся испытывает значительные затруднения при применении навыков в новых ситуациях.	Обучающийся демонстрирует частичное соответствие следующих умений: пользоваться возможностями, предоставляемыми современным программным обеспечением метода конечных элементов для проведения теоретических научных исследований при решении инженерных задач, возникающих при производстве, модернизации и ремонте транспортно-технологических средств, их технологического оборудования и комплексов на их базе. Умения освоены, но допускаются незначительные ошибки, неточности, затруднения при переносе умений на новые, нестандартные ситуации.	Обучающийся демонстрирует полное соответствие следующих умений: пользоваться возможностями, предоставляемыми современным программным обеспечением метода конечных элементов для проведения теоретических научных исследований при решении инженерных задач, возникающих при производстве, модернизации и ремонте транспортно-технологических средств, их технологического оборудования и комплексов на их базе. Свободно оперирует приобретенными умениями, применяет их в ситуациях повышенной сложности.

владеть: приемами обработки данных и эффективными алгоритмами интерпретации результатов компьютерного анализа напряженно-деформированного и теплового состояний деталей и узлов машин.	Обучающийся не владеет или в недостаточной степени владеет приемами обработки данных и эффективными алгоритмами интерпретации результатов компьютерного анализа напряженно-деформированного и теплового состояний деталей и узлов машин.	Обучающийся владеет не в полной мере приемами обработки данных и эффективными алгоритмами интерпретации результатов компьютерного анализа напряженно-деформированного и теплового состояний деталей и узлов машин. Допускаются значительные ошибки, проявляется недостаточность владения навыками по ряду показателей, Обучающийся испытывает значительные затруднения при применении навыков в новых ситуациях.	Обучающийся частично владеет приемами обработки данных и эффективными алгоритмами интерпретации результатов компьютерного анализа напряженно-деформированного и теплового состояний деталей и узлов машин. Навыки освоены, но допускаются незначительные ошибки, неточности, затруднения при переносе умений на новые, нестандартные ситуации.	Обучающийся в полном объеме владеет приемами обработки данных и эффективными алгоритмами интерпретации результатов компьютерного анализа напряженно-деформированного и теплового состояний деталей и узлов машин. Свободно применяет полученные навыки в ситуациях повышенной сложности.

Шкалы оценивания результатов промежуточной аттестации и их описание:

Форма промежуточной аттестации: зачет.

Промежуточная аттестация обучающихся в форме зачета проводится по результатам выполнения всех видов учебной работы, предусмотренных учебным планом по данной дисциплине (модулю), при этом учитываются результаты текущего контроля успеваемости в течение семестра. Оценка степени достижения обучающимися планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю) проводится преподавателем, ведущим занятия по дисциплине (модулю) методом экспертной оценки. По итогам промежуточной аттестации по дисциплине (модулю) выставляется оценка «зачтено» или «не зачтено».

К промежуточной аттестации допускаются только студенты, выполнившие все виды учебной работы, предусмотренные рабочей программой по дисциплине «Метод конечных элементов»: прошли промежуточный контроль.

Шкала оценивания	**Описание**
Зачтено	Выполнены все виды учебной работы, предусмотренные учебным планом Студент демонстрирует соответствие знаний, умений, навыков приведенным в таблицах показателей, оперирует приобретенными знаниями, умениями, навыками, применяет их в ситуациях повышенной сложности. При этом могут быть допущены незначительные ошибки, неточности, затруднения при аналитических операциях, переносе знаний и умений на новые, нестандартные ситуации или обучающийся демонстрирует частичное соответствие знаний, умений, навыков по предмету. Навыки освоены, но допускаются незначительные ошибки, неточности, затруднения при переносе умений на новые, нестандартные ситуации или обучающийся демонстрирует значительные ошибки, проявляет недостаточность знаний, умений и владения навыками по нескольким темам предмета. Обучающийся испытывает значительные затруднения при применении умений и навыков в новых ситуациях.

Не зачтено	Не выполнен один или более видов учебной работы, предусмотренных учебным планом. Студент демонстрирует неполное соответствие знаний, умений, навыков приведенным в таблицах показателей, допускаются значительные ошибки, проявляется отсутствие знаний, умений, навыков по ряду показателей, студент испытывает значительные затруднения при оперировании знаниями и умениями при их переносе на новые ситуации.

Фонды оценочных средств представлены в приложении 4 к рабочей программе.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины.

а) основная литература:

1. Солдаткин, А. В. Введение в метод конечных элементов : учебное пособие / А. В. Солдаткин, Е. С. Баранова. — Санкт-Петербург : БГТУ "Военмех" им. Д.Ф. Устинова, 2020. — 123 с. — ISBN 978-5-907324-05-3.

URL: https://e.lanbook.com/book/172238

2. Мишенков, Г.В. Метод конечных элементов в курсе сопротивления материалов [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Г.В. Мишенков, Ю.Н. Самогин, В.П. Чирков. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2015. — 472 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/71992.

б) дополнительная литература:

1. Макаров, Е. Г. Метод конечных элементов в прочностных расчётах : учебное пособие / Е. Г. Макаров. — Санкт-Петербург : БГТУ "Военмех" им. Д.Ф. Устинова, 2017. — 136 с. — ISBN 978-5-906920-49-2.

URL: https://e.lanbook.com/book/121830

в) программное обеспечение и интернет-ресурсы:

Программное обеспечение:

- универсальная программа метода конечных элементов, применяемая на предприятиях машиностроения;
- универсальная программа 3-D проектирования, применяемая на предприятиях машиностроения;
- офисное программное обеспечение.

Электронный образовательный ресурс:

Курс «Метод конечных элементов (модуль 1)»

https://online.mospolytech.ru/course/view.php?id=10121

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины.

- Специализированная учебная лаборатория кафедры «Динамика, прочность машин и сопротивление материалов» Ауд. Н-212, оснащенная компьютерами с установленным необходимым программным обеспечением;
- Проекторы, экраны для демонстрации обучающих материалов, презентаций, учебных фильмов.

9. Методические рекомендации для самостоятельной работы студентов

9.1 Методические указания по выполнению и оформлению расчетных заданий по дисциплине «Метод конечных элементов»

9.1.1 Требования к оформлению выполненных расчетных заданий

- Выполненное расчетное задание должно быть оформлено на листах формата А4 со следующими полями:
  - Левое - 25 мм.
  - Верхнее - 15 мм.
  - Правое - 15 мм.
  - Нижнее - 15 мм.
- Выполненное расчетное задание должно иметь титульный лист. Пример оформления титульного листа показан в приложении.
- Выполненное расчетное задание должно содержать следующие разделы:
  - Содержание.
  - Введение.
  - Основная часть.
  - Заключение.
  - Список использованной литературы.
  - Приложения (не являются обязательной частью отчета).

- Страницы отчета должны быть пронумерованы. Нумерация начинается со второй страницы. На титульном листе номер странице не проставляется.
- В основной части находятся все пронумерованные главы, параграфы и подпараграфы.

Нумерация параграфов и подпараграфов производятся следующим образом:

- Первая цифра обозначает номер главы.
- Вторая цифра - порядковый номер параграфа.
- Третья цифра - порядковый номер подпараграфа.

Например, параграф 2 и подпараграф 5 параграфа 2 главы 3:

- **III Описание расчетной схемы**
- **3.2 Граничные условия**
- **3.2.5 Граничные условия по перемещениям**

Нумерация рисунков производится следующим образом:

- Первая цифра обозначает номер главы.
- Вторая цифра - порядковый номер рисунка в главе.

Например, рисунок в главе 3, имеющий порядковый номер 11:

- Рис. 3.11. Диалоговое окно ввода исходных данных

Точка в конце названия главы, параграфа, подпараграфа и рисунка не ставится. Название главы пишется заглавными полужирными буквами. Названия параграфов и подпараграфов пишутся строчными полужирными буквами, за исключением первой буквы, заглавной. Подпараграфы могут быть выделены курсивом.

- Нумерация использованной литературы производится либо в алфавитном порядке, либо по мере ссылок на нее в тексте курсовой работы.

Примеры оформления литературы.

Книги:

- Бидерман В.Л. – Теория механических колебаний. – М.: Высш. школа, 1980. – 408 с.
- Bathe K.J. – Finite Element Procedures. Prentice Hall, 1996. - 1037 p.

Журналы:

- Борисов Ю.С., Благовещенский Ю.Н., Дмитриченко С.С., Панкратов Н.М. Анализ применимости уравнений и исследование формы кривой усталости // Заводская лаборатория. Диагностика материалов, №10, 2000. С. 41-52.
- Bator J.L., Bathe K.J., Ho L.W. A study of three-node triangular plate bending elements // Int. J. Numer. Meth. Engng, v.15, 1980. P. 1771 – 1812.

9.1.2 Требования к содержанию разделов выполненных расчетных заданий

1. В **содержании** должны быть представлены названия всех глав, параграфов и подпараграфов с указанием номеров начальных страниц.

2. Во **введении** обосновывается актуальность и ставится цель работы, перечисляются решаемые задачи и дается краткое содержание всех глав. Для курсового проекта, содержащего конкретные задачи, дается постановка задач.

   Теоретическая работа может носить описательный или

методический характер.

3. В **основной части** подробно описывается последовательность решения задачи.

Примерный план основной части

- Постановка задачи. Сведения об объекте исследования и области машиностроения.
- Теоретические основы решения задачи, используемые алгоритмы.
- Описание программного обеспечения
- Исходные данные, описание расчетной схемы.
- Характеристики модели МКЭ. Количество элементов, узлов, степеней свободы.
- Описание типов конечных элементов.
- Информация об условиях закрепления и нагружения.
- Последовательность формирования модели средствами программы МКЭ, особенности подготовки модели.
- Информация о процессе решения задачи.
- Сведения о компьютере, характеристиках программы МКЭ (название, версия, возможности), необходимых вычислительных ресурсах, времени решения.

- Анализ результатов расчетов.

4. В **заключении** дается краткая оценка и основные выводы выполненной работы.

5. В **приложение** выносится информационный материал, не требующий детального рассмотрения в основной части (например, таблицы, графики, рисунки, листинги программ и т.п.)

9.1.3 Требования к выполнению расчетных заданий

1. Расчетное задание должно быть оформлено согласно требованиям указанным выше.
2. Содержание расчетного задания должно соответствовать перечисленным выше требованиям.
3. Расчетное задание должно быть сдано за две недели до окончания семестра.

Приложение 1.

Структура и содержание дисциплины «Метод конечных элементов»
по направлению 23.03.02 Наземные транспортно-технологические комплексы (уровень бакалавриата).
Профиль «Интеллектуальные системы управления транспортом"
Набор 2025/2026 г.

n/n	Раздел	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов, и трудоемкость в часах					Виды самостоятельной работы студентов					Формы аттестации	
				Л	П/С	Лаб	СРС	КСР	К.Р.	К.П.	РГР	Реферат	К/р	Э	З
Седьмой семестр															
1.1	***Тема 1. Введение***	**7**	1-2	4	2		6								
1.2	***Тема 2. Сведения из математики и механики деформируемого твердого тела.***	**7**	3-4	4	2		6								
1.3	***Тема 3. Метод конечных элементов как вычислительный метод решения задач механики***	**7**	5-6	4	2		6								
1.4	***Тема 4. Метод конечных элементов задаче плоского напряженного, плоского деформированного состояний***	**7**	7-8	4	2		6								
1.5	***Тема 5. Теория изопараметрических конечных элементов***	**7**	9-10	4	2		6								

2.1	***Тема 6. Модели метода конечных элементов для расчета пластин и оболочек***	**7**	11-12	4	2		6								
2.2	***Тема 7. Моделирование теплопроводности методом конечных элементов***	**7**	13-14	4	2		6								
2.3	***Тема 8. Эффективные численные алгоритмы, используемые в современном программном обеспечении метода конечных элементов.***	**7**	15-16	4	2		6								
2.4	***Тема 9. Пути повышения точности расчетного анализа конструкций автомобилей и тракторов, выполняемого методом конечных элементов.***	**7**	17-18	4	2		6								
	Форма аттестации														**З**
	Всего часов по дисциплине			36	18		54								

Приложение 2 к
рабочей программе

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХ)

Направление подготовки: 23.03.02 Наземные транспортно-технологические комплексы (уровень бакалавриата)
Профиль: "Гоночные автомобили и мотоциклы"
Форма обучения: очная
Вид профессиональной деятельности: (В соответствии с ФГОС ВО)

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«Метод конечных элементов»

Состав: 1. Паспорт фонда оценочных средств

2. Описание оценочных средств:

Составитель:

Русанов О.А.

Москва, 2025 год

Таблица 1

ПОКАЗАТЕЛЬ УРОВНЯ СФОРМИРОВАННОСТИ КОМПЕТЕНЦИЙ

Метод конечных элементов					
ФГОС ВО 3					
В процессе освоения данной дисциплины студент формирует и демонстрирует следующие **общепрофессиональные и профессиональные компетенции**:					
КОМПЕТЕНЦИИ		**Перечень компонентов**	**Технология формирования компетенций**	**Форма оценочного средства**	**Степени уровней освоения компетенций**
ИН-ДЕКС	**ФОРМУЛИРОВ-КА**				

ОПК-2	Способен использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач	**знать:** направления развития вычислительных методов в механике и эффективные вычислительные алгоритмы, применяемые в современном программном обеспечении для решения прикладных задач анализа напряженно деформированного и теплового состояний конструкций автомобилей и тракторов. **уметь:** использовать современное программное обеспечение для расчетного анализа напряженно деформированного и теплового состояний деталей и узлов автомобилей и тракторов. **владеть:** навыками использования одной из современных вычислительных программ, реализующей метод конечных элементов, для расчета напряженно деформированного и теплового состояний деталей и узлов автомобилей и тракторов .	Самостоя-тельная работа, лекции, практические занятия	УО, ДИ, К, К/Р, Т, Р Т	**Базовый уровень:** - способен *ориентироваться в направлениях развития вычислительных методов в механике и разбираться в способах использования эффективных вычислительных алгоритмах, применяемых в современном программном обеспечении для решения прикладных задач анализа напряженно деформированного и теплового состояний конструкций автомобилей и тракторов.* Воспроизводство полученных знаний в ходе текущего контроля. **Повышенный уровень:** - способен *самостоятельно ориентироваться в направлениях развития вычислительных методов в механике и разбираться в способах использования эффективных вычислительных алгоритмах, применяемых в современном программном обеспечении для решения прикладных задач анализа напряженно деформированного и теплового состояний конструкций автомобилей и тракторов;* - способен *самостоятельно использовать современное программное обеспечение для анализа напряженно деформированного состояния и прочности деталей и узлов*

ОПК-3	Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности	**знать:** возможности современного программного обеспечения метода конечных элементов для решения инженерных задач при производстве, модернизации и ремонте транспортно-технологических средств, их технологического оборудования и комплексов на их базе . **уметь:** пользоваться возможностями, предоставляемыми современным программным обеспечением метода конечных элементов для проведения теоретических научных исследований при решении инженерных задач, возникающих при производстве, модернизации и ремонте транспортно-технологических средств, их технологического оборудования и комплексов на их базе . **владеть:** приемами обработки данных и эффективными алгоритмами интерпретации результатов компьютерного анализа напряженно-деформированного и теплового состояний деталей и узлов машин.	Самостоя-тельная работа, лекции, практичес-кие занятия	УО, ДИ, К, К/Р, Т, Р Т	**Базовый уровень:** - способен выполнять теоретические исследования путем проведения расчетов методом конечных элементов напряженно-деформированного и теплового состояний конструктивных элементов транспортно-технологических средств. Воспроизводство полученных знаний в ходе текущего контроля. **Повышенный уровень:** - способен *самостоятельно* выполнять теоретические исследования путем проведения расчетов методом конечных элементов напряженно-деформированного и теплового состояний конструктивных элементов транспортно-технологических средств. практическое применение полученных знаний в процессе подготовки к семинарам, к выступлению с докладом

Приложение 3
к рабочей программе

Перечень оценочных средств по дисциплине
«Метод конечных элементов»

№ ОС	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в ФОС
1	Деловая и/или ролевая игра (ДИ)	Совместная деятельность группы обучающихся и педагогического работника под управлением педагогического работника с целью решения учебных и профессионально - ориентированных задач путем игрового моделирования реальной проблемной ситуации. Позволяет оценивать умение анализировать и решать типичные профессиональные задачи.	Тема (проблема), концепция, роли и ожидаемый результат по каждой игре
2	Кейс-задача (К-З)	Проблемное задание, в котором обучающемуся предлагают осмыслить реальную профессионально-ориентированную ситуацию, необходимую для решения данной проблемы.	Задания для решения кейс-задачи
3	Коллоквиум (К)	Средство контроля усвоения учебного материала темы, раздела или разделов дисциплины, организованное как учебное занятие в виде собеседования педагогического работника с обучающимися.	Вопросы по темам/разделам дисциплины
4	Контрольная работа (К/Р)	Средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу	Комплект контрольных заданий по вариантам
5	Круглый стол, дискуссия, полемика, диспут, дебаты	Оценочные средства, позволяющие включить обучающихся в процесс обсуждения спорного вопроса, проблемы и оценить их умение аргументировать собственную точку зрения.	Перечень дискуссионных тем для проведения круглого стола, дискуссии, полемики, диспута, дебатов

6	Проект (П)	Конечный продукт, получаемый в результате планирования и выполнения комплекса учебных и исследовательских заданий. Позволяет оценить умения обучающихся самостоятельно конструировать свои знания в процессе решения практических задач и проблем, ориентироваться в информационном пространстве и уровень сформированности аналитических, исследовательских навыков, навыков практического и творческого мышления. Может выполняться в индивидуальном порядке или группой обучающихся.	Темы групповых и/или индивидуальных проектов
7	Рабочая тетрадь (РТ)	Дидактический комплекс, предназначенный для самостоятельной работы обучающегося и позволяющий оценивать уровень усвоения им учебного материала.	Образец рабочей тетради
8	Разноуровневые задачи и задания (РЗЗ)	Различают задачи и задания: а) репродуктивного уровня, позволяющие оценивать и диагностировать знание фактического материала (базовые понятия, алгоритмы, факты) и умение правильно использовать специальные термины и понятия, узнавание объектов изучения в рамках определенного раздела дисциплины; б) реконструктивного уровня, позволяющие оценивать и диагностировать умения синтезировать, анализировать, обобщать фактический и теоретический материал с формулированием конкретных выводов, установлением причинно-следственных связей; в) творческого уровня, позволяющие оценивать и диагностировать умения, интегрировать знания различных областей, аргументировать собственную точку зрения.	Комплект разноуровневых задач и заданий
9	Расчетно-графическая работа (РГР)	Средство проверки умений применять полученные знания по заранее определенной методике для решения задач или заданий по модулю или дисциплине в целом.	Комплект заданий для выполнения расчетно-графической работы

10	Реферат (Р)	Продукт самостоятельной работы студента, представляющий собой краткое изложение в письменном виде полученных результатов теоретического анализа определенной научной (учебно-исследовательской) темы, где автор раскрывает суть исследуемой проблемы, приводит различные точки зрения, а также собственные взгляды на нее.	Темы рефератов
11	Доклад, сообщение (ДС)	Продукт самостоятельной работы студента, представляющий собой публичное выступление по представлению полученных результатов решения определенной учебно-практической, учебно-исследовательской или научной темы	Темы докладов, сообщений
12	Устный опрос собеседование, (УО)	Средство контроля, организованное как специальная беседа педагогического работника с обучающимся на темы, связанные с изучаемой дисциплиной, и рассчитанное на выяснение объема знаний обучающегося по определенному разделу, теме, проблеме и т.п.	Вопросы по темам/разделам дисциплины
13	Творческое задание (ТЗ)	Частично регламентированное задание, имеющее нестандартное решение и позволяющее диагностировать умения, интегрировать знания различных областей, аргументировать собственную точку зрения. Может выполняться в индивидуальном порядке или группой обучающихся.	Темы групповых и/или индивидуальных творческих заданий
14	Тест (Т)	Система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающегося.	Фонд тестовых заданий
15	Тренажер (Тр)	Техническое средство, которое может быть использовано для контроля приобретенных студентом профессиональных навыков и умений по управлению конкретным материальным объектом.	Комплект заданий для работы на тренажере
16	Эссе	Средство, позволяющее оценить умение обучающегося письменно излагать суть поставленной проблемы, самостоятельно проводить анализ этой проблемы с использованием концепций и аналитического инструментария соответствующей дисциплины, делать выводы, обобщающие авторскую позицию по поставленной проблеме.	Тематика эссе

Дисциплина - **Метод конечных элементов**
Направление -23.03.02 Наземные транспортно-технологические комплексы (уровень бакалавриата), профиль: "Гоночные автомобили и мотоциклы"

Вопросы для контроля знаний

1. Основные понятия метода конечных элементов. Современное программное обеспечение. Последовательность решения задач методом конечных элементов.
2. Конечный элемент (определение). Узлы конечного элемента (определение). Степени свободы конечного элемента (определение). Функции формы конечного элемента (определение).
3. Структура современных программных комплексов метода конечных элементов.
4. Назначение и функции препроцессора в программах метода конечных элементов.
5. Назначение и функции решателя в программах метода конечных элементов.
6. Назначение и функции постпроцессора в программах метода конечных элементов.
7. Напряжения и деформации (понятия, единицы измерения). Выражения деформаций через перемещения. Линейные соотношения между напряжениями и деформациями.
8. Плоское напряженное и плоское деформированное состояние. Компоненты напряжений и деформаций, отличные от нуля.
9. Соотношения упругости для плоского напряженного состояния.
10. Функции формы конечных элементов. Свойства функций формы.
11. Функции формы стержневого конечного элемента.
12. Функции формы плоского треугольного конечного элемента.
13. Функции формы балочного конечного элемента. Полиномы Эрмита.
14. Функции формы плоского билинейного 4-узлового конечного элемента.
15. Функции формы плоского четырехугольного квадратичного 8-узлового конечного элемента.
16. Функции формы плоского четырехугольного квадратичного 9-узлового конечного элемента.
17. Функции формы шестигранного объемного 8-узлового конечного элемента с линейной аппроксимацией.
18. Функции формы шестигранного объемного 20-узлового конечного элемента с квадратичной аппроксимацией.
19. Прямой метод получения соотношений МКЭ.

20. Принцип минимума потенциальной энергии, как возможная основа МКЭ.
21. Функция потенциальной энергии на примере системы с 1 степенью свободы. Энергия деформирования. Потенциал внешних сил.
22. Общее выражение для матрицы жесткости конечного элемента.
23. Свойства матриц разрешающих систем линейных алгебраических уравнений в методе конечных элементов. Свойства матрицы жесткости.
24. Матрица жесткости стержневого конечного элемента.
25. Матрица функций формы стержневого конечного элемента. Матрица деформаций. Матрица напряжений.
26. Основные соотношения метода конечных элементов на основе принципа минимума потенциальной энергии.
27. Методы численного интегрирования функций одного аргумента, применяемые в МКЭ. Квадратурные формулы Гаусса–Лежандра. Формула трапеций численного интегрирования. Формула Симпсона численного интегрирования
28. Основные типы конечных элементов.
29. Стержневой конечный элемент.
30. Балочный конечный элемент.
31. Треугольный линейный конечный элемент плосконапряженного состояния.
32. Треугольные координаты площади (L – координаты).
33. Функции формы изопараметрических конечных элементов Лагранжева и Серендипова семейств.
34. Изопараметрические конечные элементы Лагранжева семейства.
35. Изопараметрические конечные элементы Серендипова семейства.
36. Естественные координаты изопараметрических элементов. Их связь с физическими координатами. Дифференцирование по физическим координатам функций формы явно выраженных через естественные координаты.
37. Четырехугольный билинейный конечный элемент плосконапряженного состояния. Восьмиузловой шестигранный элемент для моделирования трехмерного напряженно-деформированного состояния.
38. Гипотезы Кирхгоффа-Лява в теории изгиба пластин. Деформации при изгибе тонкой пластины. Выражение для потенциальной энергии.
39. Прямоугольный конечный элемент тонкой пластины. Функции формы. Треугольник Паскаля.
40. Основные матрицы в МКЭ. Матрицы функций формы, деформаций, жесткости, масс, эквивалентных узловых нагрузок.
41. Формирование глобальной матрицы жесткости конструкции из матриц жесткости отдельных элементов (на примере стержневой задачи).
42. Учет граничных условий в методе конечных элементов.

43. Распределенные нагрузки в конечно-элементных моделях. Приведение распределенных нагрузок к узлам конечно-элементной модели.
44. Матричное уравнение динамического равновесия конечно-элементной системы.
45. Общее выражение для матрицы масс конечного элемента.
46. Матрица масс стержневого конечного элемента.
47. Матричная формулировка задачи определения частот и форм собственных колебаний конечно элементной системы в форме задачи на собственные значения.
48. Метод LDL^T для решения систем линейных алгебраических уравнений в МКЭ.
49. Метод Холецкого для решения систем линейных алгебраических уравнений в МКЭ. Метод статической конденсации в МКЭ.
50. Решение системы линейных алгебраических уравнений с верхней или нижней треугольной матрицей.
51. Свойства матриц систем линейных алгебраических уравнений при моделировании методом конечных элементов
52. Итерационные методы решения систем МКЭ. Метод сопряженных градиентов.
53. Погрешности при выполнении расчетов методом конечных элементов. Способы повышения точности расчетного анализа напряженно-деформированного состояния в задачах МКЭ.
54. Особенности расчетных схем и конечно-элементных моделей деталей, узлов и конструкций автомобилей и тракторов. Основные приемы и способы моделирования деталей, узлов и конструкций автомобилей и тракторов методом конечных элементов.
55. Пути повышения точности выполняемого методом конечных элементов расчетного анализа напряженно-деформированного состояния конструкций автомобилей и тракторов.
56. Уравнение теплопроводности. Граничные условия для уравнения теплопроводности Учет граничных условий первого, второго и третьего рода. Стационарная теплопроводность. Уравнения Лапласа, Пуассона.
57. Формулировка метода конечных элементов для решения уравнения теплопроводности на основе метода Бубнова-Галеркина. Учет граничных условий в задаче теплопроводности.
58. Решение задачи нестационарной теплопроводности методом конечных элементов. Явная и неявная схемы треугольника, схема интегрирования Кранка-Николсона.