Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Максимов Алексей Борисович
Должность: директор департамента по образовательной политике
Дата подписания: 05.06.2026 14:17:42
Уникальный программный ключ:
8db180d1a3f02ac9e60521a5672742735c18b1d6

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В.И. Щербаков

М.Н. Лукьянов

КУРСОВОЙ ПРОЕКТ «КОЛЕБАНИЯ КОЛЕСНОЙ МАШИНЫ»

Методические указания по подготовке курсового проекта для студентов, обучающихся по направлению 15.03.03 «Прикладная механика»

Москва 2026

Работа подготовлена на кафедре «Динамика, прочность машин и сопротивление материалов»

В.И. Щербаков, М.Н. Лукьянов Методические указания к подготовке курсового проекта для студентов, обучающихся по направлению 15.03.03 «Прикладная механика» – М.: Московский политех – 2026.

Методическое указание содержит материал по подготовке курсового проекта.

© В.И. Щербаков
М.Н. Лукьянов
© Московский политех, 2026

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие содержит задание к расчетно-графической работе по разделам «Колебания и статистическая динамика механических систем с конечным числом степеней свободы» курсов «Статическая механика и теория надежности» и «Статистическая механика и теория колебаний». Даны методические указания по выполнению задания и подробные примеры расчетов.

Выполняемая работа знакомит студентов с методами составления уравнений движения колесных машин, определения спектра собственных частот и собственных форм колебаний. Рассмотрен расчет вынужденных колебаний машины, вызванных действием случайных кинематических воздействий на колеса от неровностей дороги. Даны методы расчета передаточных функций и амплитудно-частотных характеристик системы, а также оценки статистических характеристик выходных процессов, в частности, дисперсии и среднеквадратического значения ускорений на месте водителя и надежности работы упругих элементов подвески. Трудоемкие расчеты рекомендуется проводить с использованием программного комплекса MathCAD.

Выполненная работа оформляется в виде расчетно-пояснительной записки на бумаге формата А4 в соответствии с ГОСТ 2.105 ЕСКД «Общие требования к текстовым документам».

Пояснительная записка состоит из жестко сброшюрованных: титульного листа, содержания, расчетно-текстовой части с рисунками, заключения и списка использованной литературы.

1. ЗАДАНИЕ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ

1.1. Выбор исходных данных

Вначале следует выбрать расчетную схему транспортного средства и исходные числовые данные: нечетным номерам вариантов соответствуют схема рис. 1.1 и табл. 1.1, а четным – схема рис. 1.2 и табл. 1.2.

Для заданного транспортного средства требуется:

1) составить дифференциальные уравнения малых вертикальных и угловых колебаний в продольно-вертикальной плоскости, являющейся плоскостью симметрии машины;

2) найти условие, при котором:

– для схемы по рис. 1.1 вертикальные и угловые колебания корпуса многоосной машины становятся независимыми;

– для схемы по рис. 1.2 вертикальные колебания передней и задней подвесок становятся независимыми;

Таблица 1.1

вариант	*M, кг*	*ρ, м*	l_1, *м*	l_2, *м*	l_3, *м*	l_4, *м*	l_k, *м*	$c_1=c_4$, *кН/м*	$c_2=c_3$, *кН/м*	$b_1=b_4$, *кН·с/м*	$b_2=b_3$, *кН·с/м*
1	6300	0,8	2,2	0,6	1,0	2,6	2,1	90	70	90	10
3	8000	0,9	2,5	0,8	0,9	2,6	2,3	100	90	95	20
5	9000	0,9	2,4	0,7	1,0	2,7	2,3	100	90	100	30
7	10000	1,1	2,4	0,6	1,2	3,0	2,2	110	95	100	40
9	11000	1,1	2,5	0,7	1,1	2,9	2,3	110	95	110	50
11	12000	1,2	2,6	0,7	1,2	3,1	2,4	120	100	110	60
13	13000	1,2	2,7	0,8	1,9	3,0	2,5	120	110	115	70
15	15000	1,2	2,8	0,8	1,2	3,2	2,5	140	130	115	70
17	16000	1,3	2,9	0,8	1,3	3,4	2,6	150	140	120	80
19	17000	1,3	3,0	0,9	1,2	3,3	2,7	160	150	120	80

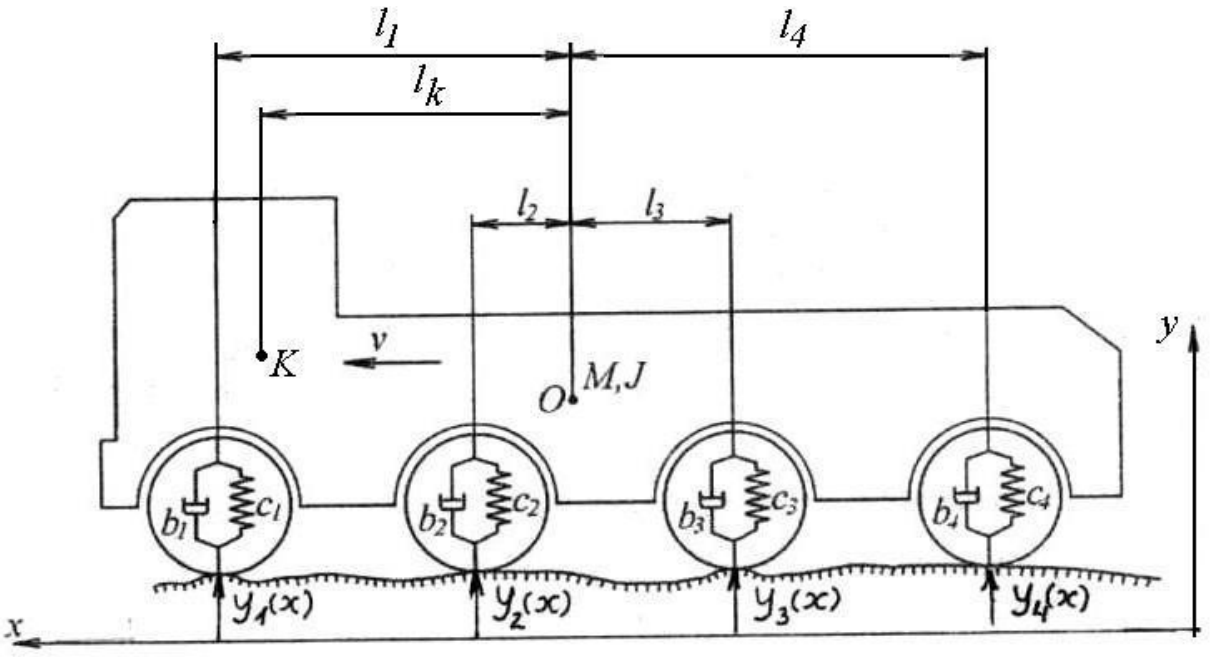


Рис. 1.1

3) принимая справедливым условие независимости колебаний (см. п. 2), построить одномассовую или двухмассовую эквивалентную схему системы подрессоривания машины и соответствующую ей математическую модель, на основе которой провести расчеты по нижеследующим пунктам;

4) определить циклические (c^{-1}) и технические ($Fц$) частоты и формы собственных колебаний системы;

5) вычислить передаточные функции от внешнего воздействия (микропрофиля дороги) к перемещениям, скоростям и ускорениям точек подрессоренной массы;

6) сформировать матрицу спектральных плотностей внешних кинематических воздействий на колеса машины;

7) рассчитать матрицу спектральных плотностей для выходных процессов;

8) найти дисперсию и среднеквадратическое отклонение значений вертикальных ускорений в точке K (сиденье водителя);

9) определить вероятность события, что за 1000 часов работы динамическая осадка упругого элемента подвески передней оси машины ни разу не превысит δ_{cm} (статическое значение осадки).

В пунктах 7, 8 и 9 провести числовые расчеты с иллюстрацией графиками для трех скоростей движения транспортного средства v_1=2,8 м/с (10 км/ч), v_2=8,3 м/с (30 км/ч) и v_3=13,9 м/с (50 км/ч).

Общие данные:

– принять момент инерции подрессоренной массы $J = M \cdot \rho^2$, где ρ – радиус инерции;

– микропрофиль дороги представляет собой стационарную случайную функцию y(x) со спектральной плотностью $S_y(\theta) = \frac{D_y \cdot d_0}{\pi\left(d_0^2 + \theta^2\right)}$, где $D_y = 2 \cdot 10^{-4}$ м^2; $d_0 = 0{,}133$ м$^{-1}$; $\left(-\infty \le \theta \le +\infty\right)$.

Таблица 1.2

Вариант	M_a, кг	m_1, кг	m_2, кг	ρ, м	c_1, кН/м	c_2, кН/м	$c_{ш1}$, кН/м	$c_{ш2}$, кН/м	b_1, кН·с/м	b_2, кН·с/м	l_1, м	l_2, м	l_k, м
2	1500	90	75	1,06	32	40	275	300	2,6	3,5	1,0	1,2	0,5
4	1900	95	80	1,30	40	50	300	330	2,9	5,8	1,2	1,5	0,6
6	2000	110	250	1,35	35	150	400	1000	3,6	4,2	1,5	1,3	0,7
8	1500	200	450	1,42	83	150	515	1080	6,4	7,0	1,6	1,4	0,8
10	3000	200	460	1,68	90	180	800	1700	5,0	8,0	1,8	1,5	0,8
12	4000	200	500	1,86	100	180	900	2000	6,8	9,0	2,0	1,6	1,0
14	6000	210	510	2,10	110	240	1000	2100	9,1	9,5	2,5	1,5	1,0
16	8000	220	550	1,80	120	300	1250	2500	9,5	9,5	3,0	1,0	1,5
18	8500	225	550	1,90	125	310	1300	1300	9,7	9,7	3,1	1,1	1,5
20	9000	230	550	2,00	130	310	1300	1300	9,8	9,8	3,2	1,2	1,5

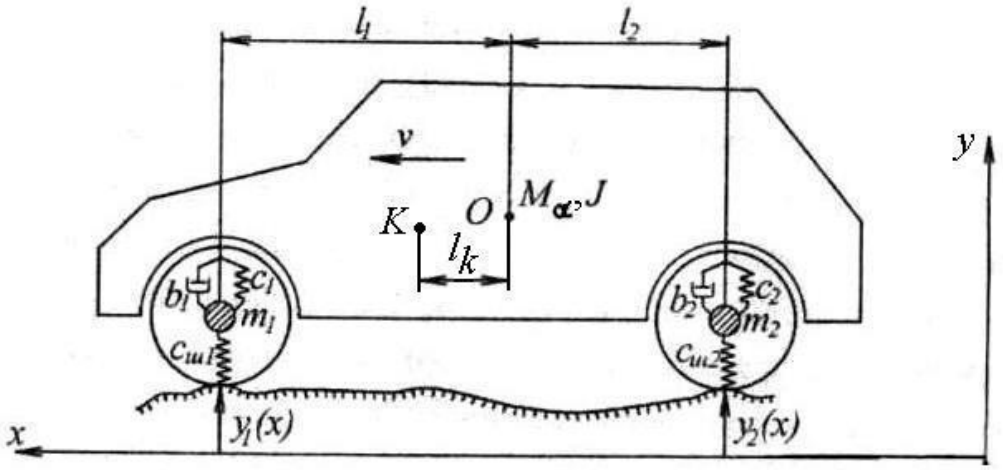


Рис. 1.2

1.2 Общие пояснения

Заданные транспортные колесные машины (см. рис. 1.1 и 1.2) движутся прямолинейно по длине пути x с постоянной скоростью v и совершают вертикальные линейные и угловые колебания в продольной плоскости симметрии машин, т.е. рассматриваются плоскостные модели. Колебания в продольной плоскости возникают от микронеровностей дороги $y(x)$ при предположении об одинаковом профиле дороги под левым и правым бортами (колесами) машины. Считается, что две главные центральные оси инерции, лежащие в плоскости симметрии машин, совпадают с вертикалью и горизонталью. Также предполагается, что характеристики подвески, амортизаторов и шин – линейные, а колеса сохраняют непрерывный контакт с дорогой.

Пояснения к рис. 1.1. Дано:

O – центр подрессоренной массы;

M, J – подрессоренная масса и момент инерции подрессоренной массы относительно главной центральной оси (точки O), перпендикулярной плоскости схемы;

c_1, c_2, c_3, c_4 – жесткости подвесок;

b_1, b_2, b_3, b_4 – коэффициенты вязкого сопротивления подвесок (под c_i и b_i понимаются приведенные значения для i-ой пары (оси) опорных колес);

l_1, l_2, l_3, l_4 – линейные размеры (координаты опорных колес относительно центра масс);

l_k – координата сиденья водителя;

$y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, $y_4(x)$ – высоты неровностей под опорными колесами в зависимости от длины пути x.

Неподрессоренными массами (пружин, катков, амортизаторов) пренебрегается.

Пояснения к рис. 1.2. Дано:

O – центр подрессоренной массы;

M_a, J – подрессоренная масса и момент инерции подрессоренной массы относительно главной центральной оси (точки O), перпендикулярной плоскости схемы;

m_1, m_2 – неподрессоренные массы;

$c_ш$, c, b – жесткости шин, подвесок и коэффициенты вязкого трения в амортизаторах (под $c_ш$, c и b понимаются суммарные значения для пары (оси) опорных колес), а дополнительные индексы «1» и «2» указывают на принадлежность соответственно передним и задним колесам и подвескам;

l_1, l_2 – координаты центра масс автомобиля;

l_k – координата сиденья водителя;

$y_1(x)$, $y_2(x)$ – высоты неровностей под передними и задними колесами в зависимости от длины пути x.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЯ С ПРИМЕРАМИ РАСЧЕТОВ

2.1. Общие указания

Перед выполнением работы изучите по учебному пособию [2] главы 1, 2, учебному пособию [3] главы 1, 2 и 5. Разберите решения задач в источнике [5] (стр. 126-150, задачи 2.7-2.14).

2.2. Указания и пример решения задачи для четырехосного транспортного средства

Условие задачи примера.

Расчетная схема транспортного средства показана на рис. 2.1. Числовые данные:

M=5000 кг; ρ=0,8 м; l_1=2,3 м; l_2=0,7 м; l_3=0,9 м; l_4=2,5 м; $l_к$=2,2 м; c_1= c_2= c_3=c_4= =100 кН/м; b_1=b_2=b_3=b_4=b=100 кН·с/м; $J = M\rho^2 = 5000 \cdot 0{,}8^2 = 3200$ *кг·м²*. Спектральная плотность микропрофиля дороги $S_y(\theta) = \dfrac{D_y \cdot d_0}{\pi\left(d_0^2 + \theta^2\right)}$, где *$D_y$ =2·10⁻⁴ м²; d_0 =0,133 м⁻¹;* $(-\infty \le \theta \le +\infty)$.

Для заданного транспортного средства требуется:

1) составить дифференциальные уравнения малых вертикальных и угловых колебаний в продольно-вертикальной плоскости, являющейся плоскостью симметрии машины;

2) найти условие, при котором вертикальные и угловые колебания корпуса многоосной машины становятся независимыми;

3) принимая справедливым условие независимости вертикальных и угловых колебаний (см. п. 2), построить одномассовые эквивалентные динамические схемы системы подрессоривания машины и соответствующие им математические модели, на основе которых провести расчеты по нижеследующим пунктам;

4) определить циклические (c^{-1}) и технические ($Fц$) частоты и формы собственных колебаний системы;

5) вычислить передаточные функции от внешнего воздействия (микропрофиля дороги) к перемещениям, скоростям и ускорениям точек подрессоренной массы;

6) сформировать матрицу спектральных плотностей внешних кинематических воздействий на колеса машины;

7) рассчитать матрицу спектральных плотностей для выходных процессов;

8) найти дисперсию и среднеквадратическое отклонение значений вертикальных ускорений в точке *K* (сиденье водителя);

9) определить вероятность события, что за 1000 часов работы динамическая осадка упругого элемента подвески передней оси машины ни разу не превысит δ_{cm} (статическое значение осадки).

В пунктах 7, 8 и 9 провести числовые расчеты с иллюстрацией графиками для трех скоростей движения транспортного средства v_1=2,8 м/с (10 км/ч), v_2=8,3 м/с (30 км/ч) и v_3=13,9 м/с (50 км/ч).

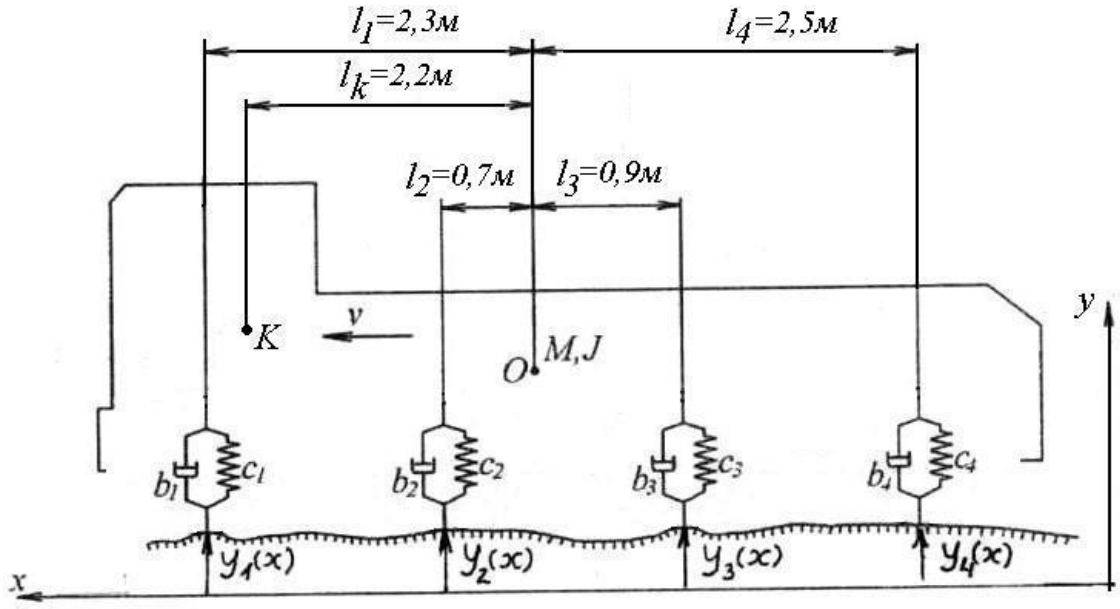


Рис. 2.1

Решение

1. Составим дифференциальные уравнения малых вынужденных колебаний машины.

Колебательная система имеет две степени свободы. Введем обобщенные координаты q_1, q_2 (рис. 2.2, а), которым дадим малые перемещения и изобразим систему схематично в возбужденном состоянии с картиной действующих сил и моментов (рис. 2.2, б). С учетом зависимости $x=vt$ законы $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ и $y_4(x)$ пересчитываются во временную область $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ и $f_4(t)$. Выразим вертикальные перемещения $h_i(i=1,\ldots,4)$ точек крепления подвесок через обобщенные координаты:

$$h_1 = q_1 + q_2 \cdot l_1;$$
$$h_2 = q_1 + q_2 \cdot l_2;$$
$$h_3 = q_1 - q_2 \cdot l_3;$$
$$h_4 = q_1 - q_2 \cdot l_4.$$

Тогда деформации δ_i упругих элементов равны:

$$\delta_1 = h_1 - f_1;\ \delta_2 = h_2 - f_2;\ \delta_3 = h_3 - f_3;\ \delta_4 = h_4 - f_4.$$

Силы в упругих элементах выразятся в виде:

$$F_{пр1} = c_1 \cdot (h_1 - f_1);$$
$$F_{пр2} = c_2 \cdot (h_2 - f_2);$$
$$F_{пр3} = c_3 \cdot (h_3 - f_3);$$
$$F_{пр4} = c_4 \cdot (h_4 - f_4),$$

а силы вязкого сопротивления в виде:

$$F_{c1} = b_1 \cdot (\dot{h}_1 - \dot{f}_1);$$
$$F_{c2} = b_2 \cdot (\dot{h}_2 - \dot{f}_2);$$
$$F_{c3} = b_3 \cdot (\dot{h}_3 - \dot{f}_3);$$
$$F_{c4} = b_4 \cdot (\dot{h}_4 - \dot{f}_4),$$

где точки наверху символов обозначают производные по времени.

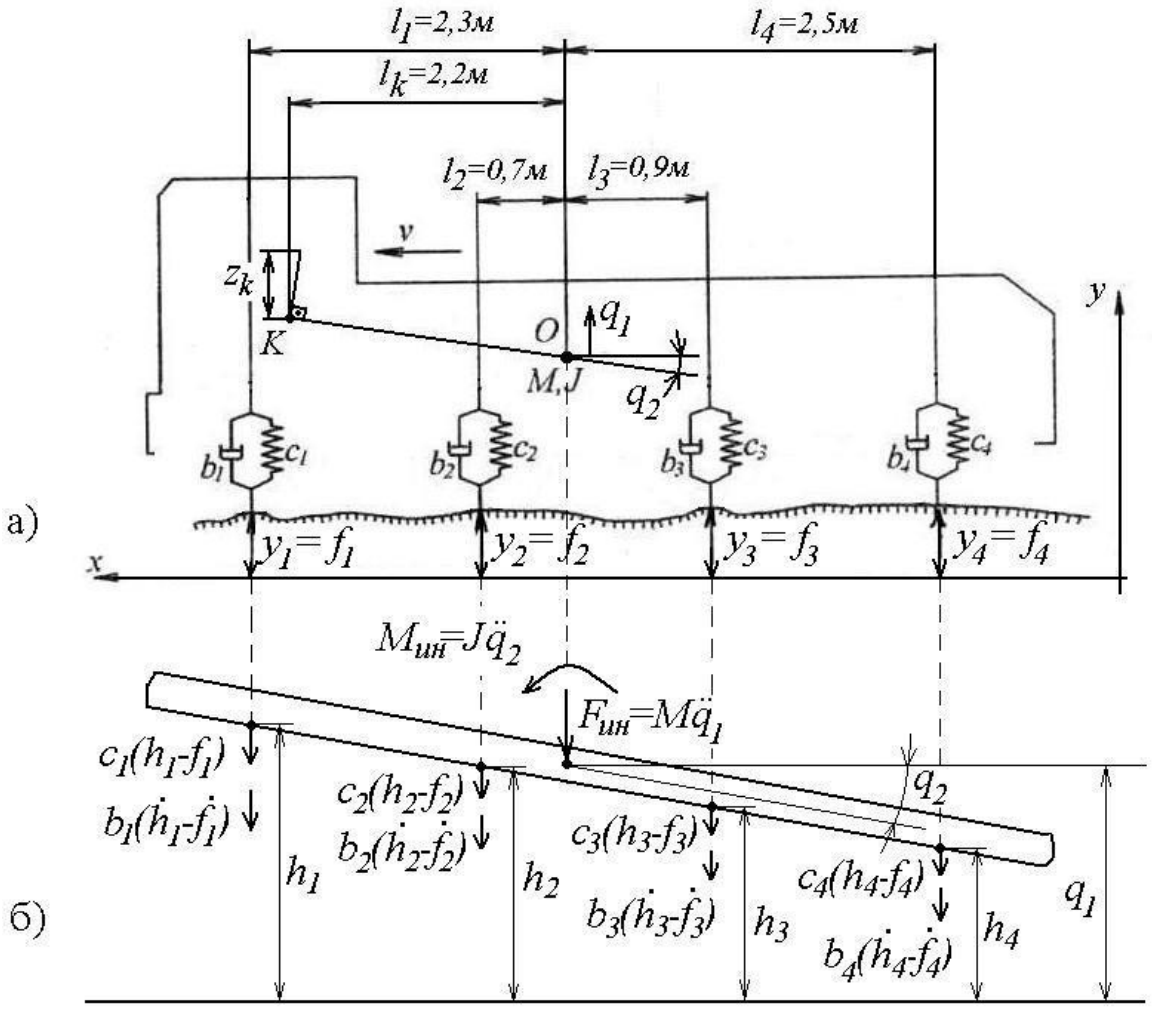


Рис. 2.2

Приняв во внимание картину сил, показанную на рис. 2.2, б, запишем уравнение динамического равновесия системы в виде равенства нулю суммы проекций всех сил на вертикальную ось и суммы моментов относительно центра масс *O*:

$$\begin{aligned} &\sum y = 0: \quad M\cdot\ddot{q}_1 + b_{\Sigma 1}\dot{q}_1 + b_{\Sigma 2}\dot{q}_2 + c_{\Sigma 1}q_1 + c_{\Sigma 2}q_2 = P_1; \\ &\sum M_0 = 0: \quad J\cdot\ddot{q}_2 + b_{\Sigma 2}\dot{q}_1 + b_{\Sigma 3}\dot{q}_2 + c_{\Sigma 2}q_1 + c_{\Sigma 3}q_2 = P_2, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$\begin{aligned} &c_{\Sigma 1} = \sum_{i=1}^{n} c_i; \quad c_{\Sigma 2} = \sum_{i=1}^{n} c_i\cdot l_i; \quad c_{\Sigma 3} = \sum_{i=1}^{n} c_i\cdot l_i^2; \quad P_1 = \sum_{i=1}^{n}(b_i\cdot\dot{f}_i + c_i\cdot f_i); \\ &b_{\Sigma 1} = \sum_{i=1}^{n} b_i; \quad b_{\Sigma 2} = \sum_{i=1}^{n} b_i\cdot l_i; \quad b_{\Sigma 3} = \sum_{i=1}^{n} b_i\cdot l_i^2; \quad P_2 = -\sum_{i=1}^{n}(b_i\cdot l_i\cdot\dot{f}_i + c_i\cdot l_i\cdot f_i), \end{aligned} \tag{2.2}$$

здесь c_i, b_i – суммарные жесткость и коэффициент сопротивления подвески опорных колес i-ой пары (оси);

f_i – высота неровности под опорными колесами i-ой пары (оси);

n – число пар (осей) опорных колес машины, в нашем случае n=4.

Подставив числовые значения, получим:

$b_{\Sigma 1}=4b=4\cdot 100=400$ *кН·с·м*$^{-1}$;

$b_{\Sigma 2}=b(2,3+0,7-0,9-2,5)=-100\cdot 0,4=-40$ *кН·с;*

$b_{\Sigma 3}=b(2,3^2+0,7^2-0,9^2-2,5^2)=100\cdot 12,84=1284$ *кН·с·м;*

$c_{\Sigma 1}=4c=4\cdot 100=400$ *кН·м*$^{-1}$;

$c_{\Sigma 2}=c(2,3+0,7-0,9-2,5)=-100\cdot 0,4=-40$ *кН;*

$c_{\Sigma 3}=c(2,3^2+0,7^2-0,9^2-2,5^2)=100\cdot 12,84=1284$ *кН·м*.

2. Найдем выражение, при котором вертикальные и угловые колебания корпуса машины становятся независимыми.

В выражения (2.2) координаты l_i подставляются со своими знаками («плюс» для опорных колес, расположенных впереди центра масс машины; «минус» - для опорных колес, расположенных за центром масс). Поэтому коэффициенты $b_{\Sigma 2}$, $c_{\Sigma 2}$, связывающие уравнения в системе (2.1), имеют небольшие значения. В случае $b_{\Sigma 2}=0$, $c_{\Sigma 2}=0$ уравнения (2.1) становятся независимыми. Первое из них будет описывать вертикальные линейные (координата q_1), а второе – продольные угловые (координата q_2) колебания:

$$M\ddot{q}_1 + b_{\Sigma 1}\dot{q}_1 + c_{\Sigma 1}q_1 = P_1; \qquad (2.3)$$

$$J\ddot{q}_2 + b_{\Sigma 3}\dot{q}_2 + c_{\Sigma 3}q_2 = P_2. \qquad (2.4)$$

3. Одномассовые эквивалентные динамические схемы системы подрессоривания машины и их математические модели.

В случае справедливости условия независимости вертикальных и угловых колебаний (см. п.2) динамическая схема машины (см. рис. 2.2, а) распадается на две одномассовые эквивалентные динамические схемы, показанные на рис. 2.3

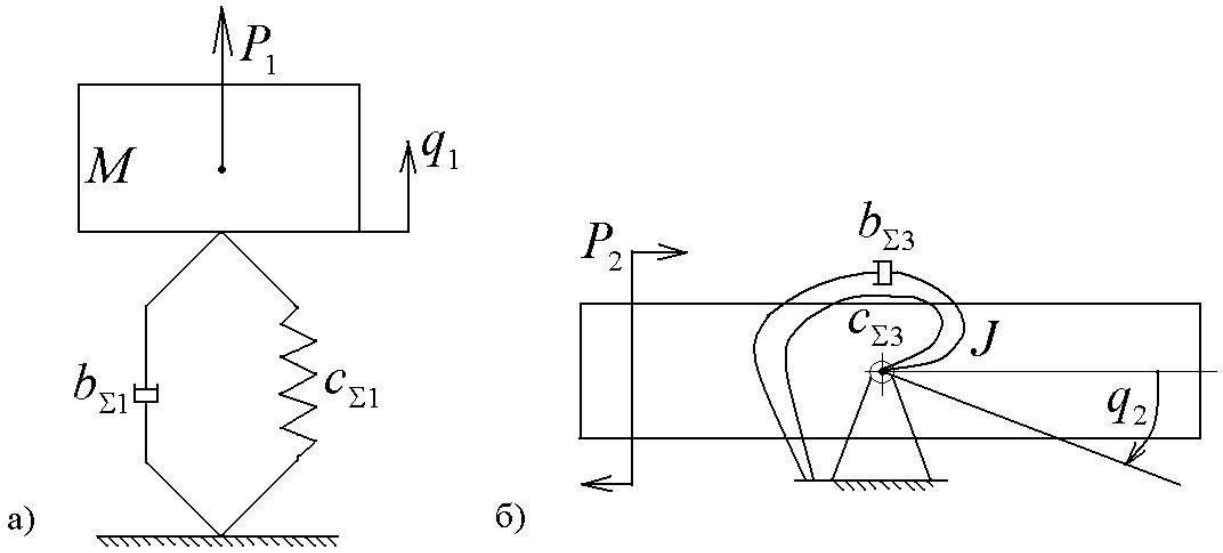


Рис. 2.3

Схема рис. 2.3,а соответствует линейным колебаниям, а – рис.2.3,б – угловым колебаниям машины. Их математические модели – уравнения (2.3) и (2.4).

4. Мастоты и формы собственных колебаний.

Уравнения (2.3), (2.4) разделим соответственно на *M*, *J* и запишем в стандартном виде:

$$\ddot{q}_1 + 2 \cdot n_1 \cdot \dot{q}_1 + \omega_1^2 \cdot q_1 = \frac{P_1}{M}; \qquad (2.5)$$

$$\ddot{q}_2 + 2 \cdot n_2 \cdot \dot{q}_2 + \omega_2^2 \cdot q_2 = \frac{P_2}{J}, \qquad (2.6)$$

где $n_1 = \frac{b_{\Sigma 1}}{2M} = \frac{400 \cdot 10^3}{2 \cdot 5000} = 40\,c^{-1}$, $n_2 = \frac{b_{\Sigma 3}}{2J} = \frac{1284 \cdot 10^3}{2 \cdot 3200} = 200{,}6\,c^{-1}$ – коэффициенты затухания;

$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_{\Sigma 1}}{M}} = \sqrt{\frac{400 \cdot 10^3}{5000}} = 8{,}94 c^{-1}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{c_{\Sigma 3}}{J}} = \sqrt{\frac{1284 \cdot 10^3}{3200}} = 20{,}0\,c^{-1}$ – циклические частоты (число колебаний за 2π секунд).

Технические собственные частоты (число колебаний за секунду):

$\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{8{,}94}{2\pi} = 1{,}42$ Гц;

$$\nu_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{20{,}0}{2\pi} = 3{,}18 \text{ Гц.}$$

Собственные формы вертикальных и угловых колебаний представляют собой гармонические колебания вида

$$q = V \cdot \sin(\omega \cdot t + \beta),$$

где V – амплитуда;

c – собственная частота;

β – фазовый угол.

5. Расчет передаточных функций от внешнего воздействия (микропрофиля дороги) к перемещениям, скоростям и ускорениям точек подрессоренной массы.

Изображение уравнений (2.5) и (2.6) в частотной области (преобразованные по Фурье):

$$\left[(i\omega)^2 + 2n(i\omega) + \omega^2\right] \cdot Q(i\omega) = \\ = M^{-1}\left\{i\omega\left[b_{11}^{1} F(i\omega) + b_{22}^{1} F(i\omega) + b_{33}^{1} F(i\omega) + b_{44}^{1} F(i\omega)\right] + c_{11} F(i\omega) + c_{22} F(i\omega) + c_{33} F(i\omega) + c_{44} F(i\omega)\right\}; \quad (2.7)$$

$$\left[(i\omega)^2 + 2n_2(i\omega) + \omega_2^2\right] \cdot Q_2(i\omega) = \\ = -J^{-1}\left\{i\omega\left[b_{111} F(i\omega) + b_{222} F(i\omega) + b_{333} F(i\omega) + b_{444} F(i\omega)\right] + c_{111} F(i\omega) + c_{222} F(i\omega) + c_{333} F(i\omega) + c_{444} F(i\omega)\right\}, \quad (2.8)$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица;

c – частота;

$Q_1(ic)$, $Q_2(ic)$ – комплексные амплитудные спектры (трансформанты Фурье) процессов $q_1(t)$ и $q_2(t)$ соответственно;

$F_1(ic)$, $F_2(ic)$, $F_3(ic)$, $F_4(ic)$ – комплексные амплитудные спектры воздействий $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$ соответственно.

Из (2.7) и (2.8) с учетом $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c$, $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b$ и подстановки числовых значений l_i $(i=1,\ldots,4)$ получим следующие передаточные функции от внешнего воздействия (микропрофиля дороги) к перемещениям:

$$H_{q_1}(i\omega) = \frac{(c + i \cdot \omega \cdot b)}{M \cdot [(\omega_1^2 - \omega^2) + i2n_1\omega]} \cdot (1;1;1;1); \quad (2.9)$$

$$H_{q_2}(i\omega) = \frac{(c + i \cdot \omega \cdot b)}{J \cdot [(\omega_2^2 - \omega^2) + i2n_2\omega]} \cdot (2{,}3;0{,}7;\text{-}0{,}9;\text{-}2{,}5), \quad (2.10)$$

где $H_{q1}(ic)$ – матрица-строка передаточных функций для амплитуд $Q_1(ic)$;

$H_{q2}(ic)$ – матрица-строка передаточных функций для амплитуд $Q_2(ic)$.

Передаточные функции для скоростей процессов:

$$H_{q_1}(i\omega) = \omega^2 \cdot H_{q_1}(i\omega); \quad (2.11)$$

$$H_{q_2}(i\omega) = \omega^2 \cdot H_{q_2}(i\omega). \quad (2.12)$$

Передаточные функции для ускорений процессов:

$$H_{q_1}(i\omega) = \omega^4 \cdot H_{q_1}(i\omega); \quad (2.13)$$

$$H_{q_2}(i\omega) = \omega^4 \cdot H_{q_2}(i\omega). \quad (2.14)$$

6. Формирование матрицы спектральных плотностей внешних воздействий.

При переходе от профиля дороги $y(x)$ к кинематическим воздействиям $f(t)$ на колеса транспортной машины необходимо учитывать скорость движения v и сглаживающую способность шин колес.

Спектральная плотность сглаженного профиля дороги $S_{\tilde{y}}(\omega)$ определяется по спектральной плотности исходного профиля $S_y(\theta)$ по формуле ([2], с. 69-76)

$$S_{\tilde{y}}(\theta) = \frac{S_y(\theta)}{a^2\theta^2 + 1},$$

где θ – частота по пути x;

a – длина отпечатка шины на дороге, может быть оценена по следующей зависимости [6]:

$$a = \sqrt{(0{,}12 \div 0{,}16)B \cdot d + (0{,}14 \div 0{,}22)B^2},$$

где B, d – ширина и посадочный диаметр шины.

Поскольку в задании не заданы размеры шин колес, то примем ориентировочно $a=0{,}1$ *м*.

Учет скорости движения v на спектральную плотность воздействия в контакте колеса с дорогой производится по формуле [2] с заменой θ на c/v:

$$S_f(\omega)=\frac{1}{\upsilon}S_y\left(\frac{\omega}{\upsilon}\right),$$

где *c* – частота воздействий по времени *t*.

Таким образом, спектральная плотность микропрофиля дороги с учетом сглаживания шины и скорости движения имеет вид:

$$S_f(\omega)=\frac{1}{\upsilon}\cdot\frac{S_y\left(\frac{\omega}{\upsilon}\right)}{a^2\left(\frac{\omega}{\upsilon}\right)^2+1}=\frac{D_y\cdot\alpha}{\pi(d^2+\omega^2)(\beta^2\omega^2+1)}, \qquad (2.15)$$

где $D_y=2\cdot10^{-4}$ м; $\alpha=\alpha_0\cdot\upsilon=0{,}133\upsilon$; $\beta=\alpha\cdot\upsilon^{-1}=0{,}1\upsilon^{-1}$; $(-\infty\le\omega\le\infty)$.

Тогда матрицу спектральных плотностей кинематических воздействий для четырехосного транспортного средства можно представить в виде

$$S_f^{\rightarrow}(\omega)=\begin{bmatrix} S_{f_1}(\omega) & S_{f_1f_2}(\omega) & S_{f_1f_3}(\omega) & S_{f_1f_4}(\omega)\\ S_{f_2f_1}(\omega) & S_{f^2}(\omega) & S_{f^2f_3}(\omega) & S_{f_2f_4}(\omega)\\ S_{f_3f_1}(\omega) & S_{f_3f_2}(\omega) & S_{f_3}(\omega) & S_{f_3f_4}(\omega)\\ S_{f_4f_1}(\omega) & S_{f_4f_2}(\omega) & S_{f_4f_3}(\omega) & S_{f_4}(\omega) \end{bmatrix}, \qquad (2.16)$$

где $S_{f_1}(\omega)=S_{f_2}(\omega)=S_{f_3}(\omega)=S_{f_4}(\omega)=S_f(\omega)$;

$$S_{f_1f_2}(\omega)=S^*_{f_2f_1}(\omega)=S_{f_2f_3}(\omega)=S^*_{f_3f_2}(\omega)=S_{f_3f_4}(\omega)=S^*_{f_4f_3}(\omega)=e^{i\omega\frac{l}{\upsilon}}\cdot S_f(\omega);$$

$$S_{f_1f_3}(\omega)=S^*_{f_3f_1}(\omega)=S_{f_2f_4}(\omega)=S^*_{f_4f_2}(\omega)=e^{i\omega\frac{2l}{\upsilon}}\cdot S_f(\omega);$$

$$S_{f_1f_4}(\omega)=S^*_{f_4f_1}(\omega)=e^{i\omega\frac{3l}{\upsilon}}\cdot S_f(\omega);$$

*– символ комплексо-сопряженной величины;

l – расстояние между осями, для рассматриваемого примера *l=1,6м*.

7. Расчет матрицы спектральных плотностей выходных процессов.

На выходе системы имеем два случайных процесса $q_1(t)$ и $q_2(t)$, первый из которых определяет закон вертикальных колебаний, а второй – угловых колебаний. Эти процессы описываются следующей матрицей спектральных плотностей:

$$S_{\vec{q}}(\omega) = \begin{vmatrix} S_{q_1}(\omega) & S_{q_1 q_2}(\omega) \\ S_{q_1 q_2}(\omega) & S_{q_2}(\omega) \end{vmatrix}, \qquad (2.17)$$

где $S_{q_1 q_2}(\omega) = S^*_{q_1 q_2}(\omega)$.

Элементы матрицы $S_{\vec{q}}(\omega)$ найдем из следующей матричной формулы:

$$S_{\vec{q}}(\omega) = H^*_{\vec{q}}(i\omega) \cdot S_{\vec{f}}(\omega) \cdot H^T_{\vec{q}}(i\omega), \qquad (2.18)$$

где $H_{\vec{q}}(i\omega) = \begin{pmatrix} H_{q_1}(i\omega) \\ H_{q_2}(i\omega) \end{pmatrix}$ – матрица передаточных функций (см. формулы (2.9), (2.10));

$S_{\vec{f}}(\omega)$ – матрица спектральных плотностей входных воздействий (см. формулу (2.16)).

Подставив (2.9), (2.10) и (2.16) в (2.18), получим:

$$S_{q_1}(\omega) = \frac{(c^2 + \omega^2 b^2)}{M^2 \cdot \left[(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2\right]} \times$$

$$\times 2 \cdot (2 + 3\cos\omega \frac{l}{\upsilon} + 2\cos\omega \frac{2l}{\upsilon} + \cos\omega \frac{3l}{\upsilon}) \cdot S_f(\omega);$$

$$S_{q_1 q_2}(\omega) = S^*_{q_1 q_2}(\omega) = -\frac{(c^2 + \omega^2 b^2)}{M \cdot J \cdot \left[(\omega_1^2 - \omega^2) - i2n\omega\right] \cdot \left[(\omega_2^2 - \omega^2) - i2n\omega\right]} \times$$

$$\times 0{,}2 \cdot (2 + 3\cos\omega \frac{l}{\upsilon} + 2\cos\omega \frac{2l}{\upsilon} + \cos\omega \frac{3l}{\upsilon}) \cdot S_f(\omega);$$

$$S_{q_2}(\omega) = \frac{(c^2 + \omega^2 b^2)}{J^2 \cdot \left[(\omega_2^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2\right]} \times$$

$$\times (12{,}84 + 6{,}46\cos\omega \frac{l}{\upsilon} - 7{,}64\cos\omega \frac{2l}{\upsilon} - 11{,}5\cos\omega \frac{3l}{\upsilon}) \cdot S_f(\omega).$$

8. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение значений ускорения в точке К (сиденье водителя).

Из рис. 2.2,а имеем геометрическую зависимость:

$$z_k = q_1 + l_k \cdot tgq_2 \approx q_1 + l_k \cdot q_2.$$

Передаточная функция воздействий q_1, q_2 к вертикальному перемещению z_k:

$$H_{z_k}(i\omega) = (1; l_k).$$

Тогда спектральная плотность перемещений $z_k(t)$ равна:

$$S_{z_k}(\omega) = H^*_{z_k}(i\omega) \cdot S_q(\omega) \cdot H^T_{z_k}(i\omega) = (1; l_k) \cdot \begin{pmatrix} S_{q_1}(\omega) & S_{q_1 q_2}(\omega) \\ S_{q_1 q_2}(\omega) & S_{q_2}(\omega) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_k \end{pmatrix} =$$

$$= S_{q_1}(\omega) + 2 l_k \, \mathrm{Re}(S_{q_1 q_2}(\omega)) + l_k^2 S_{q_2}(\omega).$$

Спектральная плотность скорости $\dot{z}_k(t)$:

$$S_{\dot{z}_k}(\omega) = \omega^2 \cdot S_{z_k}(\omega).$$

Спектральная плотность ускорений $\ddot{z}_k(t)$:

$$S_{\ddot{z}_k}(\omega) = \omega^2 \cdot S_{\dot{z}_k}(\omega) = \omega^4 \cdot S_{z_k}(\omega).$$

Дисперсия $D_{\ddot{z}_k}$ и среднеквадратическое отклонение $s_{\ddot{z}_k}$ ускорений $\ddot{z}_k(t)$ на месте водителя:

$$D_{\ddot{z}_k} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\ddot{z}_k}(\omega) d\omega = s^2_{\ddot{z}_k}.$$

Считая, что $\ddot{z}_k$ имеет нормальное распределение, получаем максимально возможное значение случайного ускорения, которое действует на водителя:

$$\max \ddot{z}_k = 3 \cdot s_{\ddot{z}_k}. \qquad (2.19)$$

По полученным выражениям с помощью ЭВМ (например, в среде MathCAD) следует построить графики изменения спектральной плотности $S_{\ddot{z}_k}(\omega)$ в зависимости от c ($-4\omega_2 \le \omega \le 4\omega_2$, где c_2=*20 с*$^{-1}$ – высшая собственная частота системы) для заданных трех скоростей движения v_1=*2,8 м/с (10 км/ч),* v_2=*8,3 м/с (30 км/ч)* и v_3=*13,9 м/с (50 км/ч)*. Путем численного интегрирования этих графиков найти дисперсии и среднеквадратические отклонения.

9. *Определение вероятности события, что за 1000 часов работы динамическая осадка упругого элемента подвески передней оси машины ни разу не превысит* $\delta_{ст}$.

Статическую осадку упругого элемента примем равной:

$$\delta_{cm} = \frac{M \cdot g}{4c} = \frac{5000 \cdot 10}{4 \cdot 100 \cdot 10^3} = 0{,}025 \ м.$$

Деформация упругого элемента подвески передней оси машины от динамических нагрузок (см. рис. 2.2):

$$\delta_1 = q_1 + q_2 \cdot l_1 - f_1.$$

Передаточная функция:

$$H_{\delta_1}(i\omega) = (1; l_1; -1).$$

Спектральная плотность деформации:

$$S_{\substack{\delta \\ q1}}(\omega) = H^*_{\delta_1}(i\omega) \cdot S(\omega) \cdot H^T_{\delta_1}(i\omega) =$$

$$= (1; l_k; -1) \cdot \begin{pmatrix} S_{q_1}(\omega) & S_{q_1 q_2}(\omega) & S_{q_1 f_1}(\omega) \\ S_{q_2 q_1}(\omega) & S_{q_2}(\omega) & S_{q_2 f_1}(\omega) \\ S_{f_1 q_1}(\omega) & S_{f_1 q_2}(\omega) & S_f(\omega) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ l_1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= S_{q_1}(\omega) + 2l_1 \operatorname{Re}(S_{q_2 q_1}(\omega)) - 2\operatorname{Re}(S_{q_1 f_1}(\omega)) + l_1^2 S_{q_2}(\omega) - 2l_1 \operatorname{Re}(S_{f_1 q_2}(\omega)) + S_f(\omega).$$

Спектральная плотность скорости $\dot{\delta}_1(t)$:

$$S_{\dot{\delta}_1}(\omega) = \omega^2 \cdot S_{\delta_1}(\omega).$$

Дисперсия деформаций упругого элемента:

$$D_{\delta_1} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\delta_1}(\omega) \cdot d\omega.$$

Дисперсия скорости деформаций упругого элемента:

$$D_{\dot{\delta}_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \cdot S_{\delta_1}(\omega) \cdot d\omega.$$

Эффективная циклическая частота процесса $\delta_1(t)$:

$$\omega_\delta = \sqrt{\frac{D_{\dot{\delta}_1}}{D_{\delta_1}}}.$$

Вероятность выброса значений процесса $\delta_1(t)$ за δ_{cm} по формуле Райса:

$$p_1 = P\{\delta_1(t) > \delta_{cm},\ t = 1000 \cdot 60 \cdot 60 = 36 \cdot 10^5 c\} = \frac{36 \cdot 10^5}{2\pi} \cdot \bar{\omega}_{\delta_1} \cdot \exp\left\{-\frac{\delta_{cm}^2}{2D_{\delta_1}}\right\}.$$

Вероятность события, что за 1000 часов работы осадка упругого элемента подвески передней оси машины ни разу не превысит δ_{cm}:

$$p_2 = P\left\{\delta_1(t)\langle\delta_{cm}\ ,\ t = 36\cdot10^5 c\right\} = 1 - p_1. \qquad (2.19)$$

По полученным выражениям с помощью ЭВМ (например, в среде MathCAD) следует провести числовые расчеты вероятности p_2 для заданных трех скоростей движения v_1=*2,8 м/с (10 км/ч),* v_2=*8,3 м/с (30 км/ч)* и v_3=*13,9 м/с (50 км/ч)*. При числовом интегрировании область частот ограничить диапазоном $-4\omega_2 \le \omega \le 4\omega_2$, где c_2=*20* c^{-1} – высшая собственная частота системы.

В конце расчетно-пояснительной записки сделать заключение, в котором следует указать значения собственных частот системы, среднеквадратического ускорения в точке размещения сиденья водителя и вероятности p_2.

2.3. Указания и пример решения задачи для двухосного автомобиля

Условие задачи примера

Расчетная схема автомобиля показана на рис. 2.4. Числовые данные:

M_a=5000 кг; ρ=1,86 м; l_1=2,4 м; l_2=1,5 м; $l_к$=2 м; m_1=m_2=800 кг, c_1= c_2= c=4·10^5 Н/м; $c_{ш1}$=$c_{ш2}$=$c_ш$=10^6 Н/м; b_1=b_2=b=1,5·10^4 Н·с/м; $J = M_\alpha \rho^2 = 5000 \cdot 1{,}86^2 = 17300$ кг·м^2. Спектральная плотность микропрофиля дороги $S_y(\theta) = \dfrac{D_y \cdot d_0}{\pi\left(d_0^2 + \theta^2\right)}$, где D_y =2·10^{-4} м^2; d_0 =0,133 м$^{-1}$; $\left(-\infty \le \theta \le +\infty\right)$.

Для заданного транспортного средства требуется:

1) составить дифференциальные уравнения малых вертикальных и угловых колебаний в продольно-вертикальной плоскости, являющейся плоскостью симметрии машины;

2) найти условие, при котором вертикальные и угловые колебания передней и задней подвесок автомобиля становятся независимыми;

3) принимая справедливым условие независимости колебаний (см. п. 2), построить двухмассовые эквивалентные динамические схемы системы подрессоривания машины и соответствующие им математические модели, на основе которых провести расчеты по нижеследующим пунктам;

4) определить циклические (c^{-1}) и технические ($Fц$) частоты и формы собственных колебаний автомобиля;

5) вычислить передаточные функции от внешнего воздействия (микропрофиля дороги) к перемещениям, скоростям и ускорениям точек подрессоренной и неподрессоренных масс;

6) сформировать матрицу спектральных плотностей внешних кинематических воздействий на колеса автомобиля;

7) рассчитать матрицу спектральных плотностей для выходных процессов;

8) найти дисперсию и среднеквадратическое отклонение значений вертикальных ускорений в точке K (сиденье водителя);

9) определить вероятность события, что за 1000 часов работы динамическая осадка упругого элемента подвески передней оси автомобиля ни разу не превысит δ_{cm} (статическое значение осадки).

В пунктах 7, 8 и 9 провести числовые расчеты с иллюстрацией графиками для трех скоростей движения транспортного средства v_1=2,8 м/с (10 км/ч), v_2=8,3 м/с (30 км/ч) и v_3=13,9 м/с (50 км/ч).

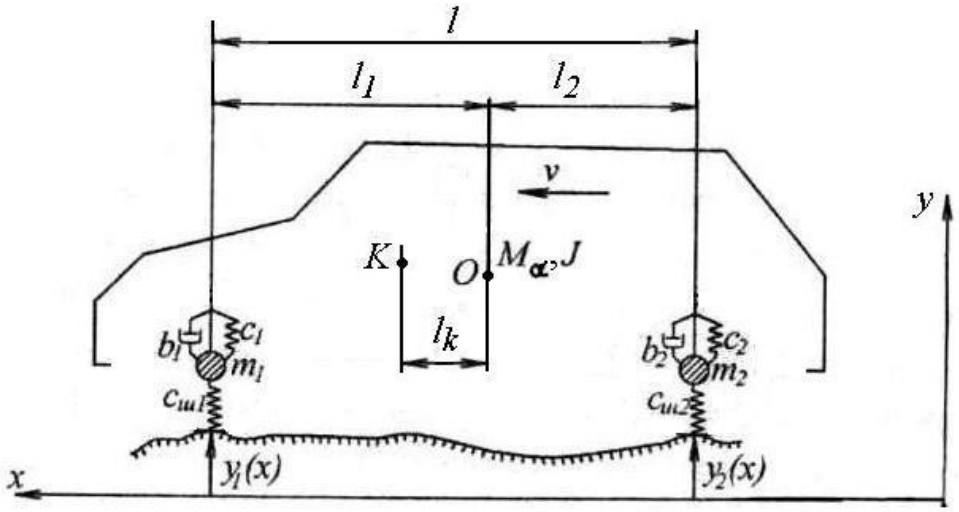


Рис. 2.4

Решение

1. *Составим уравнения малых вынужденных колебаний автомобилей.*

Рассматриваем автомобиль как систему с четырьмя степенями свободы (рис. 2.5, а). В качестве обобщенных координат выбираем вертикальные перемещения передней (q_1) и задней (q_2) неподрессоренных масс и расположенных над ними точек подрессоренной массы кузова (z_1 и z_2).

Дадим обобщенным координатам малые перемещения q_1, q_2, z_1, z_2 и скорости $\dot{z}_1$, $\dot{z}_2$, $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ в положительных направлениях. С учетом зависимости $x=vt$ законы $y_1(x)$ и $y_2(t)$ пересчитываются во временную область $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – случайные процессы, действующие на колеса автомобиля.

Составим выражения для кинетической T, потенциальной M энергий и диссипативной функции Φ:

$$T = \frac{1}{2}\left[m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2 + M_\alpha \left(\frac{l_2 \dot{z}_1 + l_1 \dot{z}_2}{l} \right)^2 + J \left(\frac{\dot{z}_1 - \dot{z}_2}{l} \right)^2 \right];$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\left[c_{ш1}(q_1 - f_1)^2 + c_1(z_1 - q_1)^2 + c_{ш2}(q_2 - f_2)^2 + c_2(z_2 - q_2)^2 \right];$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\left[b_1(\dot{z}_1 - \dot{q}_1)^2 + b_2(\dot{z}_2 - \dot{q}_2)^2 \right].$$

Подставив выражения для *T*, *M* и *Ф* в уравнение Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \quad i \in (1,...,4)$$

где $q_1 = q_1, \quad q_2 = q_2, \quad q_3 = z_1, \quad q_4 = z_2,$

и после преобразований, получим систему дифференциальных уравнений:

$$m_1 \ddot{q}_1 - b_1(\dot{z}_1 - \dot{q}_1) + c_{ш1}(q_1 - f_1) - c_1(z_1 - q_1) = 0;$$

$$m_2 \ddot{q}_2 - b_2(\dot{z}_2 - \dot{q}_2) + c_{ш2}(q_2 - f_2) - c_2(z_2 - q_2) = 0;$$

$$M_\alpha \left(\frac{l_2 \ddot{z}_1 + l_1 \ddot{z}_2}{l} \right) + b_1(\dot{z}_1 - \dot{q}_1) + b_2(\dot{z}_2 - \dot{q}_2) + c_1(z_1 - q_1) + c_2(z_2 - q_2) = 0; \quad (2.21)$$

$$J\left(\frac{\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2}{l} \right) + b_1(\dot{z}_1 - \dot{q}_1)l_1 - b_2(\dot{z}_2 - \dot{q}_2)l_2 + c_1(z_1 - q_1)l_1 - c_2(z_2 - q_2)l_2 = 0.$$

В полученной системе уравнений первые два уравнения описывают движение подвесок (неподрессоренных масс), а третье и четвертое – соответственно линейное и угловое движения кузова (подрессоренной массы).

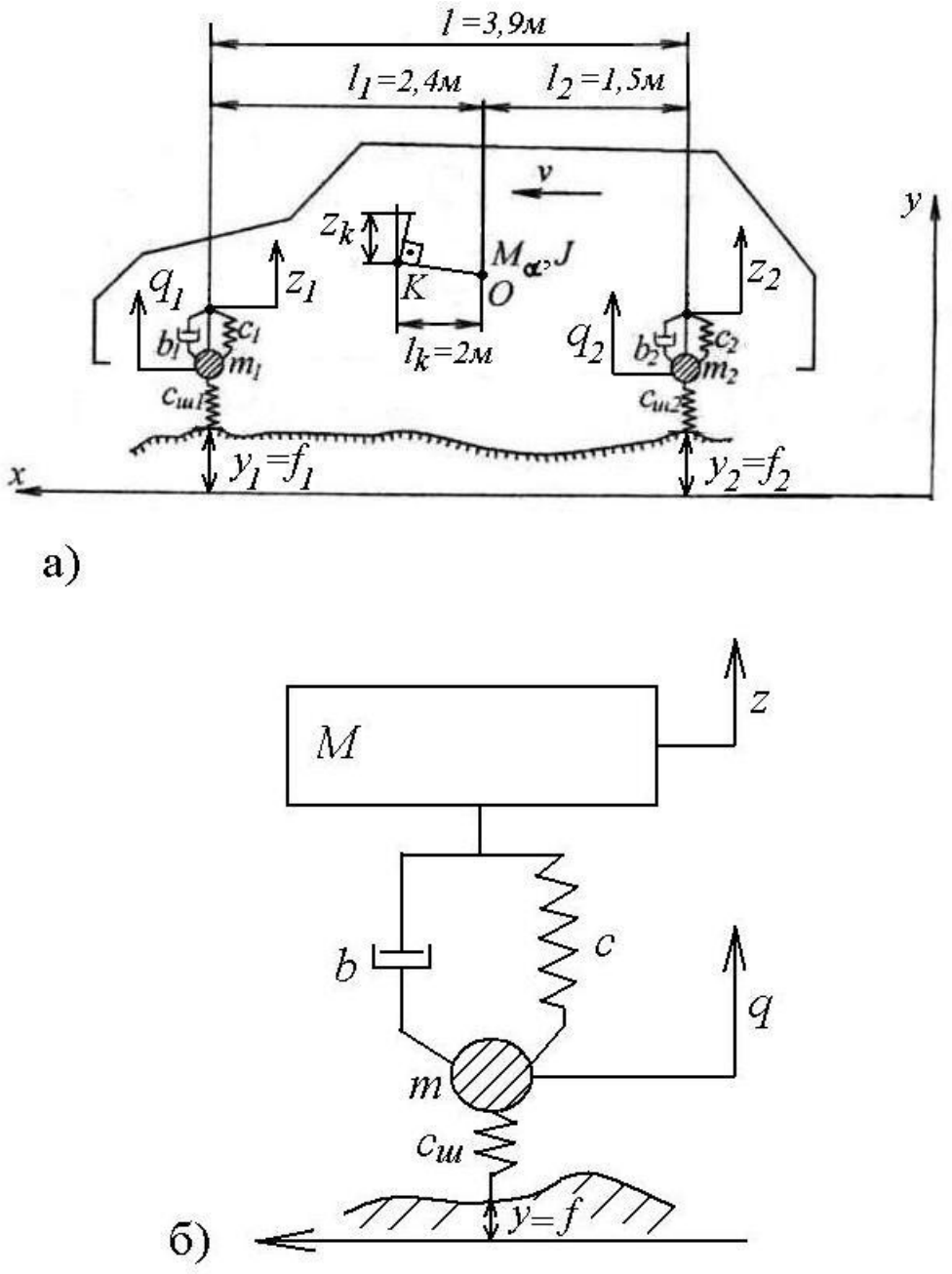


Рис. 2.5

2. Найдем условие, при котором вертикальные колебания передней и задней подвесок становятся независимыми.

Обозначим силы взаимодействия подвесок с кузовом через F_1 и F_2, т.е.:

$$b_1\left(\dot{z}_1-\dot{q}_1\right)+c_1\left(z_1-q_1\right)=F_1;$$

$$b_2\left(\dot{z}_2-\dot{q}_2\right)+c_2\left(z_2-q_2\right)=F_2.$$

Тогда, решив последние два уравнения системы (2.21) относительно F_1 и F_2, получим:

$$F_1 = -\frac{\left(M_\alpha l_2^2 + J\right)}{l^2}\ddot{z}_1 - \frac{\left(M_\alpha l_1 l_2 - J\right)}{l^2}\ddot{z}_2;$$

$$F_2 = -\frac{\left(M_\alpha l_1^2 + J\right)}{l^2}\ddot{z}_2 - \frac{\left(M_\alpha l_1 l_2 - J\right)}{l^2}\ddot{z}_1.$$

В этих выражениях вторые члены в правых частях характеризуют связь между колебаниями передней и задней частей автомобиля. Если учесть, что для рассматриваемого автомобиля распределение подрессоренной массы соответствует:

$$\varepsilon = \frac{J}{M_\alpha l_1 l_2} = \frac{M_\alpha \rho^2}{M_\alpha l_1 l_2} = \frac{\rho^2}{l_1 l_2} = \frac{1{,}86^2}{2{,}4 \cdot 1{,}5} = 0{,}96,$$

т.е. близко к единице $(0{,}8 \le \varepsilon \le 1{,}2)$, то можно считать колебания передней части, описываемые координатами q_1, z_1, и колебания задней части, описываемые координатами q_2, z_2, практически независимыми друг от друга.

3. Двухмассовые эквивалентные динамические схемы системы подрессоривания автомобиля и их математические модели.

Считая справедливым условие независимости колебаний передней и задней подвесок, из системы (2.21) получаем две независимые системы уравнений и при дальнейших аналитических расчетах исходим из двухмассовой системы (m_1, M_1) или (m_2, M_2) (рис. 2.5, б, индексы «1», «2» опущены), на которые распадается динамическая схема автомобиля. Части подрессоренной массы, приходящиеся на упругие элементы подвесок, равны:

$$M_1 = \frac{M_\alpha l_2^2 + J}{l^2} \approx \frac{M_\alpha l^2 + M_\alpha l_1 l_2}{l^2} = M_\alpha \frac{l_2}{l} = \frac{5000 \cdot 1{,}5}{3{,}9} = 1923\ кг;$$

$$M_2 = \frac{M_\alpha l_1^2 + J}{l^2} \approx \frac{M_\alpha l^2 + M_\alpha l_1 l_2}{l^2} = M_\alpha \frac{l_1}{l} = \frac{5000 \cdot 2{,}4}{3{,}9} = 3077\ кг.$$

Уравнения движения двухмассовой системы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &M \cdot \ddot{z} + b\left(\dot{z} - \dot{q}\right) + c\left(z - q\right) = 0; \\ &m \cdot \ddot{q} - b\left(\dot{z} - \dot{q}\right) - c\left(z - q\right) + c_ш\left(q - f\right) = 0. \end{aligned} \qquad (2.22)$$

4. Определение частот и форм собственных колебаний автомобиля.

Рассмотрим свободные колебания автомобиля на основе эквивалентной динамической схемы, показанной на рис. 2.5, б. Положим внешнее воздействие *f=0*, а также имея в виду, что диссипативные силы не оказывают существенного влияния на частоты и формы свободных колебаний системы, примем *b=0*. Уравнения движения получают вид:

$$\begin{aligned} &M \cdot \ddot{z} + c(z-q) = 0; \\ &m \cdot \ddot{q} - c(z-q) + c_ш q = 0. \end{aligned} \qquad (2.23)$$

Решение этих уравнений может быть найдено в виде:

$$\begin{aligned} &z = A_z \cdot \cos(\omega t + \beta); \\ &q = A_q \cdot \cos(\omega t + \beta), \end{aligned} \qquad (2.24)$$

где A_z, A_q – амплитуды;

c – циклическая собственная частота;

β – фазовый угол.

Подставив (2.24) в (2.23), получим систему однородных алгебраических уравнений относительно амплитуд A_z, и A_q:

$$\begin{cases} \left(c - \omega^2 M\right) \cdot A_z - c \cdot A_q = 0; \\ -c \cdot A_z + \left(c + c_ш - \omega^2 m\right) \cdot A_q = 0. \end{cases} \qquad (2.25)$$

Эта система уравнений имеет ненулевые решения, если ее определитель $\Delta(\omega^2) = 0$. Или в развернутом виде:

$$\begin{vmatrix} \left(c - \omega^2 M\right) & -c \\ -c & \left(c + c_ш - \omega^2 m\right) \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.26)$$

Условие (2.26) дает следующее характеристическое уравнение:

$$M \cdot m \cdot \omega^4 - \left(c \cdot m + c \cdot M + c_ш M\right) \cdot \omega^2 + c \cdot c_ш = 0. \qquad (2.27)$$

Введем обозначения:

$$\frac{c}{M} = p_1^2; \quad \frac{c + c_ш}{m} = p_2^2; \quad \frac{c_ш}{m} = p_3^2.$$

Тогда уравнение (2.27) можно записать в виде:

$$\omega^4 - \left(p_1^2 + p_2^2\right)\cdot\omega^2 + p_1^2 p_3^2 = 0\,. \qquad (2.28)$$

Корни уравнения (2.28) дают следующие значения собственных частот колебательной системы, эквивалентной двухосной колесной машине (см. рис. 2.5, б):

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{p_1^2 + p_2^2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2 - 4p_1^2 p_3^2}}\,;$$
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2 - 4p_1^2 p_3^2}}\,. \qquad (2.29)$$

Частота c_1 называется низкой, или основной собственной частотой, ее можно условно считать частотой подрессоренной части M. Частота c_2 называется высокой собственной частотой, или частотой колебаний неподрессоренной массы m.

Для высокой частоты разница между парциальной частотой $p_2 = \sqrt{\frac{c + c_ш}{m}}$ и частотой c_2 обычно невелика. Значение основной собственной частоты с достаточной для практики точностью можно получить, заменив в выражении $p_1 = \sqrt{\frac{c}{M}}$ жесткость подвески c приведенной жесткостью $c_{пр}$, учитывающей жесткость шин.

С учетом вышесказанного, приближенные значения собственных частот можно определить по следующим формулам:

$$\omega_1 \approx \sqrt{\frac{c_{пр}}{M}} = \sqrt{\frac{c \cdot c_{пр}}{M \cdot \left(c + c_ш\right)}}\,; \qquad (2.29,\ а)$$
$$\omega_2 \approx \sqrt{\frac{c + c_ш}{m}}\,.$$

Для определения собственных форм воспользуемся первым из уравнений (2.25) (тоже можно получить и из второго уравнения):

$$\frac{A_q}{A_z} = \frac{c - \omega^2 M}{c}\,. \qquad (2.30)$$

Положив в (2.30) $\omega^2 = \omega_1^2$, получим соотношение между амплитудами A_z, и A_q при колебаниях по первой собственной форме:

$$\frac{A_{q1}}{A_{z2}} = \frac{c - \omega_1^2 M}{c} = V_1. \qquad (2.31)$$

При $\omega^2 = \omega_2^2$ – по второй собственной форме:

$$\frac{A_{q2}}{A_{z2}} = \frac{c - \omega^2 M}{c} = V_2. \qquad (2.32)$$

Числовые расчеты.

Для передней части автомобиля.

$$p_1^2 = \frac{c_1}{M_1} = \frac{4 \cdot 10^5}{1923} = 208 c^{-2},$$

$$p_2^2 = \frac{c_1 + c_{ш1}}{m_1} = \frac{4 \cdot 10^5 + 10^6}{800} = 1750 c^{-2},$$

$$p_3^2 = \frac{c_{ш1}}{m_1} = \frac{10^6}{800} = 1250 c^{-2}.$$

В соответствии с формулами (2.29) запишем:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{p_1^2 + p_2^2}{2} \# \frac{1}{2}\sqrt{\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2 - 4 p_1^2 p_3^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{208 + 1750}{2} \# \frac{1}{2}\sqrt{\left(208 + 1750\right)^2 - 4 \cdot 208 \cdot 1250}} = \sqrt{979 \# 835{,}5}\, c^{-1}.$$

Откуда получим собственные частоты:

циклические

$$\omega_1 = \sqrt{143{,}5} = 12{,}0 c^{-1};$$

$$\omega_2 = \sqrt{1814{,}5} = 42{,}6 c^{-1};$$

технические

$$\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{12{,}0}{2\pi} = 1{,}9 \ Fц,$$

$$\nu_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{42{,}6}{2\pi} = 6{,}8 \ Fц.$$

Собственные формы колебаний по формулам (2.31) и (2.32):

первая форма $V_1 = \frac{A_{q\,1}}{A_{z_1 1}} = \frac{c - \omega^2 M}{c} = \frac{4\cdot 10^5 - 12^2 \cdot 1923}{4\cdot 10^5} = 0{,}31;$

вторая форма $V_2 = \frac{A_{q\,2}}{A_{z\,2}} = \frac{c - \omega^2 M}{c} = \frac{4\cdot 10^5 - 42{,}6^2 \cdot 1923}{4\cdot 10^5} = -7{,}72.$

Убедимся в ортогональности этих форм:

$$M_1 \cdot A_{z_1 1} \cdot A_{z_1 2} + m_1 \cdot V_1 \cdot A_{z_1 1} \cdot V_2 \cdot A_{z_1 2} = A_{z\,1} \cdot A_{z\,2} \cdot \left(M_1 + m_1 \cdot V_1 \cdot V_2\right) =$$
$$= A_{z\,1} \cdot A_{z\,2} \cdot \left(1923 - 800 \cdot 0{,}31 \cdot 7{,}72\right) \approx 0.$$

Дополнительно к проведенному расчету найдем собственные частоты по приближенным формулам (2.29, а):

$$\omega_1^* = \sqrt{\frac{c_1 \cdot c_{ш1}}{M_1 \cdot \left(c_1 + c_{ш1}\right)}} = \sqrt{\frac{4\cdot 10^5 \cdot 10^6}{1923 \cdot \left(4\cdot 10^5 + 10^6\right)}} = 12{,}2\,c^{-1};$$

$$\omega_2^* = \sqrt{\frac{c_1 + c_{ш1}}{m_1}} = \sqrt{\frac{4\cdot 10^5 + 10^6}{800}} = 41{,}8 c^{-1}.$$

Видим, что приближенные значения собственных частот отличаются от точных значений менее чем на 2%.

Для задней части автомобиля.

$$p_1^2 = \frac{c_2}{M_2} = \frac{4\cdot 10^5}{3077} = 130 c^{-2},$$

$$p_2^2 = \frac{c_2 + c_{ш2}}{m_2} = \frac{4\cdot 10^5 + 10^6}{800} = 1750 c^{-2},$$

$$p_3^2 = \frac{c_{ш2}}{m_2} = \frac{10^6}{800} = 1250 c^{-2}.$$

В соответствии с формулами (2.29) запишем:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{p_1^2 + p_2^2}{2} \# \frac{1}{2}\sqrt{\left(p_1^2 + p_2^2\right)^2 - 4 p_1^2 p_3^2}} =$$
$$= \sqrt{\frac{130 + 1750}{2} \# \frac{1}{2}\sqrt{\left(130 + 1750\right)^2 - 4 \cdot 130 \cdot 1250}} = \sqrt{940 \# 840}\, c^{-1}.$$

Откуда получим собственные частоты:

циклические $\omega_1 = 9{,}54\,c^{-1};$

$\omega_2 = 42{,}3c^{-1};$

технические $\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{9{,}54}{2\pi} = 1{,}52$ *Fц,*

$\nu_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{42{,}3}{2\pi} = 6{,}73$ *Fц.*

Собственные формы колебаний по формулам (2.31) и (2.32):

первая форма $V_1 = \frac{A_{q1}}{A_{z_1 1}} = \frac{c - \omega^2 M}{c} = \frac{4\cdot 10^5 - 9{,}54^2 \cdot 3077}{4\cdot 10^5} = 0{,}30;$

вторая форма $V_2 = \frac{A_{q2}}{A_{z_1 2}} = \frac{c - \omega^2 M}{c} = \frac{4\cdot 10^5 - 42{,}3^2 \cdot 3077}{4\cdot 10^5} = -12{,}8.$

Убедимся в ортогональности этих форм:

$$M_1 \cdot A_{z_1} \cdot A_{z_2} + m_1 \cdot V_1 \cdot A_{z_1} \cdot V_2 \cdot A_{z_2} = A_{z_1} \cdot A_{z_2} \cdot \left(M_1 + m_1 \cdot V_1 \cdot V_2\right) =$$
$$= A_{z_1} \cdot A_{z_2} \cdot \left(3077 - 800 \cdot 0{,}30 \cdot 12{,}8\right) \approx 0.$$

5. *Расчет передаточных функций от внешнего воздействия (микропрофиля дороги) к перемещениям, скоростям и ускорениям точек подрессоренной и неподрессоренной масс*.

Уравнения движения двухмассовой системы (2.22) в векторно-матричном виде:

$$M \cdot \ddot{\vec{q}} + B \cdot \vec{q} + C \cdot \vec{q} = D \cdot f(t),$$

где $M = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b & -b \\ -b & b \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} c & -c \\ -c & c + c_w \end{pmatrix};$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_w \end{pmatrix}; \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} z \\ q \end{pmatrix}; \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Матрица передаточных функций определяется как:

$$H_{\vec{q}}(i\omega) = \left[H_{kj}(i\omega)\right] = \left[-\omega^2 M + i\omega B + C\right]^{-1} \cdot D, \quad (k, j = 1,2).$$

В соответствии с правилами вычисления обратных матриц получим:

$$\left[-\omega^2 M + i\omega B + C\right]^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} c + c_ш - \omega^2 m + i\omega b & c + i\omega b \\ c + i\omega b & c - \omega^2 M + i\omega b \end{pmatrix},$$

где $\Delta = \left(c - \omega^2 M\right)\cdot\left(c + c_ш - \omega^2 m\right) - c^2 + i\omega b\cdot\left(c_ш - \omega^2 M - \omega^2 m\right),$

или в виде $\Delta = Mm\omega^4 - \left[M\left(c + c_ш\right) + mc\right]\omega^2 + cc_ш - i\omega b\cdot\left[\omega^2\left(M + m\right) - c_ш\right].$

Тогда элементы матрицы передаточных функций к перемещениям q и z будут равны:

$$H_q(i\omega) = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$H_{11}(i\omega) = 0;\ H_{12}(i\omega) = \frac{c_ш\cdot\left(c + i\omega b\right)}{\Delta};$$

$$H_{21}(i\omega) = 0;\ H_{22}(i\omega) = \frac{c_ш\left(c - \omega^2 M + i\omega b\right)}{\Delta}.$$

Матрицы передаточных функций к скоростям $\dot{q}, \dot{z}$ и ускорениям $\ddot{q}, \ddot{z}$ связаны с матрицей $H_q(i\omega)$ через c^2 и c^4 соответственно:

$$H_{\dot{q}}(i\omega) = \omega^2\cdot H_q(i\omega);$$
$$H_{\ddot{q}}(i\omega) = \omega^4\cdot H_q(i\omega).$$

6. Формирование матрицы спектральных плотностей внешних кинематических воздействий на колеса автомобиля.

При переходе от профиля дороги *y(x)* к кинематическим воздействиям *f(t)* на колеса автомобиля необходимо учитывать скорость движения *v* и сглаживающую способность шин колес. Методика такого расчета рассмотрена в примере решения задачи для четырехосного транспортного средства (см. п. 2.2, с. 17-19).

Окончательный вид спектральной плотности микропрофиля дороги $S_f(\omega)$ с учетом сглаживания шины и скорости движения дается формулой (2.15).

Тогда матрица спектральных плотностей кинематических воздействий для двухмассовой эквивалентной схемы автомобиля будет иметь вид:

$$S_f(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_f(\omega) \end{bmatrix}.$$

7. *Расчет матрицы спектральных плотностей выходных процессов*.

Для вектора случайных процессов на выходе $q(t)$ можно найти матрицу спектральных плотностей $[S_{q_k q_j}(\omega)]$ по следующему соотношению:

$$S_q(\omega) = \begin{bmatrix} S_z(\omega) & S_{zq}(\omega) \\ S_{qz}(\omega) & S_q(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}^* & H_{12}^* \\ H_{21}^* & H_{22}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_f(\omega) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} H_{12}^* H_{12} S_y & H_{12}^* H_{22} S_f \\ H_{22}^* H_{12} S_y & H_{22}^* H_{22} S_f \end{bmatrix},$$

где * - знак комплексно-сопряженной величины;

T – знак транспонирования;

$S_f(\omega)$ – спектральная плотность микронеровностей дороги.

Спектральная плотность случайного процесса *z(t)* – смещений точки подрессоренной массы, к которой крепится подвеска:

$$S_z(\omega) = H_{12}^*(i\omega) \cdot H_{12}(i\omega) \cdot S_f(\omega) = \frac{c_ш^2 \left(c^2 + \omega^2 b^2\right)}{\Delta^* \cdot \Delta} \cdot S_f(\omega),$$

где $\Delta^* \cdot \Delta = \left\{ Mm\omega^4 - \left[M\left(c + c_ш\right) + mc\right]\omega^2 + c \cdot c_ш \right\}^2 + b^2\omega^2\left[\omega^2\left(M + m\right) - c_ш\right]^2$.

Спектральная плотность случайного процесса *q(t)* – смещений неподрессоренной массы:

$$S_q(\omega) = H_{22}^*(i\omega) \cdot H_{22}(i\omega) \cdot S_f(\omega) = \frac{c_ш^2 \left(c - \omega^2 M\right) + \omega^2 b^2\right)}{\Delta^* \cdot \Delta} \cdot S_f(\omega).$$

Взаимная спектральная плотность процессов *z(t)* и *q(t)*:

$$S_{zq}(\omega) = H_{12}^*(i\omega) \cdot H_{22}(i\omega) \cdot S_f(\omega) = \frac{c_ш^2 \left[(c^2 - \omega^2 cM + \omega^2 b^2) + i\omega^3 bM\right]}{\Delta^* \cdot \Delta} \cdot S_f(\omega).$$

Спектральные плотности скоростей и ускорений случайных процессов *z(t)* и *q(t)* могут быть найдены по следующим формулам:

$$S_{\dot{z}}(\omega) = \omega^2 \cdot S_z(\omega);$$

$$S_{\ddot{z}}(\omega) = \omega^4 \cdot S_z(\omega);$$

$$S_q(\omega) = \omega^2 \cdot S_q(\omega);$$

$$S_{\dot{q}}(\omega) = \omega^4 \cdot S_q(\omega).$$

По полученным выражениям с помощью ЭВМ (например, в среде MathCAD) следует построить графики изменения спектральных плотностей $S_q(\omega)$, $S_z(\omega)$ в зависимости от ω ($-4\omega_2 \le \omega \le 4\omega_2$, где c_2=42,6 c^{-1} – высшая собственная частота системы) для передней и задней подвесок и трех скоростей движения v_1=2,8 м/с (10 км/ч), v_2=8,3 м/с (30 км/ч) и v_3=13,9 м/с (50 км/ч).

8. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение значений ускорения в точке К (сиденье водителя).

Выразим смещение z_k через перемещение точек крепления подвесок z_1 и z_2 (см. рис. 2.5, а):

$$z_k = k_1 z_1 + k_2 z_2,$$

где $k_1 = \frac{l_k}{l} + \frac{l_2}{l}$; $k_2 = \frac{l_1}{l} - \frac{l_k}{l}$.

Передаточная функция от z_1, z_2 к z_k:

$$H_{z_k} = (k_1; k_2).$$

Спектральная плотность смещения в точке *К*:

$$S_{z_k}(\omega) = H_{z_k}^* \cdot S_z(\omega) \cdot H_{z_k}^T = (k_1; k_2) \cdot \begin{pmatrix} S_{z_1}(\omega) & S_{z_1 z_2}(\omega) \\ S_{z_2 z_1}(\omega) & S_{z_2}(\omega) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} =$$

$$= k_1^2 S_{z_1}(\omega) + 2k_1 k_2 \operatorname{Re}(S_{z_1 z_2}(\omega)) + k_2^2 S_{z_2}(\omega).$$

Здесь $S_{z_1}(\omega) = \frac{c_{ш1}^2 \left(c_1^2 + \omega^2 b_1^2\right)}{\Delta_1^* \cdot \Delta_1} \cdot S_f(\omega)$,

где $\Delta_1^* \cdot \Delta_1 = \left\{M_1 m_1 \omega^4 - \left[M_1 \left(c_1 + c_{ш1}\right) + m_1 c_1\right]\omega^2 + c_1 \cdot c_{ш1}\right\}^2 + b_1^2 \omega^2 \left[\omega^2 (M_1 + m_1) - c_{ш1}\right]^2$;

$$S_{z_2}(\omega) = \frac{c_{ш2}^2 \left(c_2^2 + \omega^2 b_2^2\right)}{\Delta_2^* \cdot \Delta_2} \cdot S_f(\omega),$$

где

$$\Delta_2^* \cdot \Delta_2 = \left\{ M_2 m_2 \omega^4 - \left[M_2 \left(c_2 + c_{ш2} \right) + m_2 c_2 \right] \cdot \omega^2 + c_2 \cdot c_{ш2} \right\}^2 + b_2^2 \omega^2 \left[\omega^2 \left(M_2 + m_2 \right) - c_{ш2} \right]^2.$$

Взаимная спектральная плотность $S_{z_1 z_2}(\omega)$ процессов $z_1(t)$ и $z_2(t)$:

$$S_z(\omega) = \begin{pmatrix} S_{z_1}(\omega) & S_{z_1 z_2}(\omega) \\ S_{z_2 z_1}(\omega) & S_{z_2}(\omega) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} H^*_{12\,per} & 0 \\ 0 & H^*_{12\,zad} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_{f_1}(\omega) & S_{f_1 f_2}(\omega) \\ S_{f_2 f_1}(\omega) & S_{f_2}(\omega) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H_{12\,per} & 0 \\ 0 & H_{12\,zad} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} H^*_{12\,per} H_{12\,per} S_{f_1}(\omega) & H^*_{12\,per} H_{12\,zad} S_{f_1 f_2}(\omega) \\ H^*_{12\,zad} H_{12\,per} S_{f_2 f_1}(\omega) & H^*_{12\,zad} H_{12\,zad} S_{f_2}(\omega) \end{pmatrix},$$

где дополнительные индексы «*per*» и «*zad*» указывают на принадлежность к передней и задней подвескам соответственно;

$$S_{f_1}(\omega) = S_{f_2}(\omega) = S_f(\omega);$$

$$S_{f_1 f_2}(\omega) = S^*_{f_2 f_1}(\omega) = \frac{1}{\upsilon} e^{i\omega \frac{l}{\upsilon}} S_f\left(\frac{\omega}{\upsilon}\right).$$

Таким образом,

$$S_{z_1 z_2}(\omega) = H^*_{12\,per} \cdot H_{12\,zad} \cdot S_{f_1 f_2}(\omega) = \frac{c_{ш1}(c_1 - i\omega b_1)}{\Delta_1^*} \cdot \frac{c_{ш2}(c_2 - i\omega b_2)}{\Delta_2} \cdot S_{f_1 f_2}(\omega).$$

Дисперсия ускорений $\ddot{z}_k$ на сиденье водителя:

$$D_{\ddot{z}_k} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 \cdot S_{z_k}(\omega) \cdot d\omega.$$

Среднеквадратическое отклонение значений ускорений $\ddot{z}_k$:

$$s_{\ddot{z}_k} = \sqrt{D_{\ddot{z}_k}}.$$

По полученным выражениям с помощью ЭВМ (например, в среде MathCAD) следует построить графики изменения спектральной плотности $S_{\ddot{z}_k}(\omega)$ в зависимости от c ($-4\omega_2 \le \omega \le 4\omega_2$, где c_2=*42,6* c^{-1} – высшая собственная частота системы) для заданных трех скоростей движения v_1=*2,8 м/с (10 км/ч),* v_2=*8,3 м/с (30 км/ч)* и v_3=*13,9 м/с (50 км/ч)*. Путем численного

интегрирования этих графиков найти дисперсии и среднеквадратические отклонения ускорения $\ddot{z}_k$.

9. Определение вероятности события, что за 1000 часов работы динамическая осадка упругого элемента передней подвески автомобиля ни разу не превысит $\delta_{ст}$.

Статическая осадка упругого элемента передней подвески:

$$\delta_{ст} = \frac{M_1 \cdot g}{c_1} = \frac{1923 \cdot 10}{4 \cdot 10^5} = 0{,}048 \ м.$$

Динамическая осадка (деформация) упругого элемента:

$$\delta_1 = z_1 - q_1.$$

Передаточная функция от z_1, q_1 к δ_1:

$$H_{\delta_1}(i\omega) = (1;-1).$$

Спектральная плотность деформаций упругого элемента:

$$S_{\delta_1}(\omega) = (1;-1) \cdot \begin{pmatrix} S_{z_1}(\omega) & S_{z_1 q_1}(\omega) \\ S_{q_1 z_1}(\omega) & S_{q_1}(\omega) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= S_{z_1}(\omega) - 2_2 \operatorname{Re}(S_{z_1 q_1}(\omega)) + S_{q_1}(\omega).$$

После подстановки выражений $S_{z_1}(\omega)$, $S_{z_1 q_1}(\omega)$, $S_{q_1}(\omega)$ получим:

$$S_{\delta 1}(\omega) = \frac{c_{ш_1} M_1^2 \omega^4}{\Delta_1^* \cdot \Delta_1} \cdot S_f(\omega).$$

Спектральная плотность скорости $\dot{\delta}_1(t)$:

$$S_{\dot{\delta}_1}(\omega) = \omega^2 \cdot S_{\delta_1}(\omega).$$

Дисперсия деформаций упругого элемента:

$$D_{\delta_1} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\delta_1}(\omega) \cdot d\omega.$$

Дисперсия скорости $\dot{\delta}_1(t)$:

$$D_{\dot{\delta}_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \cdot S_{\delta_1}(\omega) \cdot d\omega.$$

Эффективная циклическая частота процесса $\delta_1(t)$:

$$\overline{\omega}_\delta = \sqrt{\frac{D_{\dot{\delta}_1}}{D_{\delta_1}}}.$$

Вероятность выброса значений $\delta_1(t)$ за δ_{cm} по формуле Райса:

$$p_1 = P\left\{\delta_1(t) \rangle \delta_{cm},\ t = 1000 \cdot 60 \cdot 60 = 36 \cdot 10^5 c\right\} = \frac{t}{2\pi} \cdot \overline{\omega}_{\delta_1} \cdot \exp\left\{-\frac{\delta_{cm}^2}{2D_{\delta_1}}\right\}.$$

Вероятность противоположного события, состоящего в том, что за 1000 часов работы деформация упругого элемента передней подвески автомобиля ни разу не превысит δ_{cm}:

$$p_2 = P\left\{\delta_1(t) \langle \delta_{cm},\ t = 36 \cdot 10^5 c\right\} = 1 - p_1.$$

По полученным выражениям с помощью ЭВМ (например, в среде MathCAD) следует провести числовые расчеты вероятности p_2 для заданных трех скоростей движения v_1=*2,8 м/с (10 км/ч),* v_2=*8,3 м/с (30 км/ч)* и v_3=*13,9 м/с (50 км/ч)*. При числовом интегрировании область частот ограничить диапазоном $-4\omega_2 \le \omega \le 4\omega_2$, где c_2=*42,6* c^{-1} – высшая собственная частота системы.

В конце расчетно-пояснительной записки сделать заключение, в котором следует указать значения собственных частот системы, дисперсии и среднеквадратического ускорения в точке размещения сиденья водителя и вероятности p_2.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний: Учебник для вузов. – М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. – 414с.

2. Гусев А.С. Надежность механических систем и конструкций при случайных воздействиях / А.С. Гусев, А.Л. Карунин, Н.А. Крамской, С.А. Стародубцева. – М.: МГТУ «МАМИ», 2001. – 284с.

3. Гусев А.С. Теория колебаний в автомобиле- и тракторостроении / А.С. Гусев, А.Л. Карунин, Н.А. Крамской, С.А. Стародубцева, В.И. Щербаков. – М.: МГТУ «МАМИ», 2007. – 336с.

4. Светлицкий В.А. Статистическая механика и теория надежности. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 504с.

5. Щербаков В.И. Избранные задачи по динамике механических систем и конструкций. 2-е издание, испр. и доп. / В.И. Щербаков, И.С. Чабунин, С.А, Стародубцева. – М.: МГТУ «МАМИ», 2010. – 288с.

6. Яценко Н.Н. Поглощающая и сглаживающая способность шин. – М.: Машиностроение, 1978. – 132с.